Existência e multiplicidade de soluções para um problema de Neumann.

Alfredo de Oliveira **Assis**; Edcarlos Domingos da **Silva**

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: alfredo.mat.ufg@gmail.com; edcarlos@mat.ufg.br

Palavras chaves: Problema de Neumann, Equações Elipticas, Teorema do ponto de sela, Métodos Variacionais.

1 Introdução

Considere o seguinte problema eliptico semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & em\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è um conjunto aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular η é o vetor normal a $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\eta$, $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que os seguintes limites

$$\alpha(x) = \lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t},\ \beta(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t}$$

ocorrem uniformemente em $x \in \Omega$ e definem funções continuas $\alpha, \beta : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. Neste caso o problema (P) torna-se assintoticamente linear na origem e no infinito, a qual tem sido estudado por vários autores, veja [1,2,3] e [8,9,10]. Aqui destacamos o caso ressonante no infinito no qual tem sido pesquisado exaustivamente nos últimos anos, veja [8,9].

Inicialmente considere o problema de autovalores:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m u & em\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \qquad \text{(PL)}$$

onde $m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, m \in L^\infty(\Omega)$. Note que este problema posui uma sequência de autovalores satisfazendo as seguintes desigualdades

$$\cdots \lambda_{-k}(m) \leq \cdots \leq \lambda_{-2}(m) \leq \lambda_{-1}(m) \leq \lambda_0(m) = 0 \leq \lambda_1(m) \leq \lambda_2(m) \cdots \leq \lambda_k(m) \cdots .$$

tal que $\lambda_k(m) \longrightarrow +\infty$, $\lambda_{-k}(m) \longrightarrow -\infty$, $k \longrightarrow +\infty$, desde que m possua parte positiva e negativa não triviais, veja [6].

Lembrando que $\lambda_0(m) = 0$ é sempre autovalor de (PL) com autofunção $\varphi_0 \equiv 1$ em Ω e que uma condição nescessária para a solubilidade de (P), veja [7], é dada por:

$$\int_\Omega f(x,u)dx = 0, \qquad u \in H^1(\Omega). \tag{I}$$

Estudaremos a existência e a multiplicidade de soluções do problema (P) para a não linearidade f particular apartir de métodos variacionais, que estabelecerá condições sobre λ e a não linearidade f e seus limites assintoticos no infinito e na origem. Estas relações serão cruciais para obtermos nossos pricipais resultados que melhoram os resultados anteriores pois a não linearidade f não satisfazerá as condições de Periodicidade, Monoticidade e de Landesman-Lazer.

2 Materiais e Métodos

Neste trabalho consideraremos uma classe especial de funções $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ escrita da seguinte forma $f(x,t) = \lambda_k t + h(x) + g(t),\ t \in \mathbb{R};\ x \in \Omega$ onde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e $h \in L^q(\Omega),\ q = \frac{2n}{n+2}$.

2.1 Formulação variacional

Considere o seguinte problema eliptico semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_k u + h(x) + g(u) & em\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P'}$$

Resolver (P') é equivalente a determinar os pontos criticos do funcional $J : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, veja [5,7,10] , definido por:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \int_\Omega G(u)dx - \int_\Omega uhdx$$

onde

$$G(u) = \int_0^u g(s)ds,\ u \in \mathbb{R}.$$

Note que $u \in H^1(\Omega)$ é solução para (P') se e somente se,

$$J'(u)\varphi = 0; \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Em outra palavras, determinar soluções de (P') é equivalente a encontrar pontos críticos de J. Mais especificamente, $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de (P'), se e somente se:

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx = \lambda_k \int_\Omega u.\varphi dx + \int_\Omega (g(u)+h)\varphi dx, \qquad \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

2.2 Teorema do ponto de sela

Agora vamos dar condições para que o funcional $J : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ possua a geometria do ponto de sela que nos fornecerá pontos criticos para o funcional J.

Teorema 2.2.1. : Dado $E = V \oplus W$, onde $V\ e\ W$ são subespaços fechados e $0 < dim(V) < +\infty$. Supondo $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ satisfazendo:
(L-1) $\exists\ \rho > 0$ tal que

$$J(w) \geq \rho,\ \forall\ w \in W$$

(L-2)$\exists\ r > 0\ e\ \beta < \rho$ tal que

$$J(u) \leq \beta,\ \forall\ v \in v,\ ||v|| = r$$

Então J tem um ponto de sela z no nivel

$$c = inf_{h\in\mathcal{H}}\ \ sup_{u\in V} J(h(u)),$$

onde

$$\mathcal{H}\ = \{h \in C(V,E)\ :\ h|_{\partial V} = id\}.$$

3 Resultados e discussões

Dado o problema (P') temos:

Teorema 3.1. Suponnha $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \lim_{|t|\to\infty} \frac{g(t)}{t} \leq \lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t}.$$

Assumindo que $h \in L^q(\Omega)$ satisfaz:

$$\overline{F}(-\infty) < \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h(x)dx < \underline{F}(\infty)$$

onde definimos

$$\overline{F}(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} \sup F(t),\ \underline{F}(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} \inf F(t)$$

e

$$F(t) = \frac{2}{t}\int_0^t g(s)ds - g(t)$$

Então o problema (P'), onde $k = 1$, tem no mínimo uma solução fraca em $H^1(\Omega)$.

Exemplo 3.1. Sejam $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h \in L^q(\Omega),\ q = \frac{2n}{n+2}$, tal que:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - e^{-t^4|\sin t|}\ln(1+t^2), & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 2e^t - 1, & \text{se} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

e

$$\frac{1}{|\Omega|}\Big|\int_\Omega h(x)dx\Big| < 1$$

Note que função g dada acima não satisfaz as condições impostas nos trabalhos anteriores. Mais precisamente, g não satisfaz as condições de Landesman-Lazer, nem a de monoticidade,nem a de periodicidade e nem a condição do sinal, veja [8,9].

Agora consideraremoos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. Suponnha $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que:

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{g(t)}{t} = 0$$

e

$$\Big|\int_\Omega hv dx\Big| < \frac{1}{2}(\underline{F}(-\infty) - \overline{F}(+\infty)),$$

para todo $v \in E(\lambda_k)$ com $||v||_{L^1(\Omega)} = 1$ onde $E(\lambda_k)$ é o autoespaço correspondente ao autovalor λ_k. Então o problema (P'), onde $k > 1$, tem no mínimo uma solução fraca em $H^1(\Omega)$.

4 Conclusões

Notamos que para esta classe de problemas tivemos uma quantidade significativa de resultados que não satisfazem nenhumas das outras condições citadas. Além disso, discutimos a existência e multiplicidade de soluções para o problema (P') impondo que k>1; ou seja; temos ressonância e autovalores não principais. Neste caso, usando uma função auxiliar, podemos provar resultados relativos a compacidade, veja [2], requerida em nossos métodos.

Referências

[1] AMANN, H - *Saddle points and multiple solutions of nonlinear differential equations.*. Math. Z. 169 (1979), no. 2, 127 - 166.

[2] AMBROSETTI, A. AND MALCHIODI, A. - *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems.*Cambridge Studies in Advanced Mathematics,104. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[3] BARTOLO, P. BENCI, V. FORTUNATO, D. - *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity.*. Nonlinear Anal. 7, 1983, 981 - 1012.

[4] BREZIS, H. - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* , Springer, New York,2010.

[5] BREZIS, H; NIRENBERG, L. - *Remarks on finding critical points.*.Comm. Pure Appl. Math. 44, 1991, no. 8-9, 939 - 963.

[6] DE FIGUEIREDO, D. G - *Positive solutions of semilinear elliptic problems.*Differential Equations,1981, Lecture Notes in Math.,957, Springer Berlin-New York, 1982.

[7] KESAVAN, E. - *Topics and Functional Analyzis and Applications.*New Age International (P) Limite, Tata Institute of Fundamental Research Bangalore, India 2003.

[8] TANG, CHUN-LEI *Multiple solutions of Neumann problem for elliptic equations.* , Nonlinear Anal. 54, 2003, 637-650.

[9] TANG, CHUN-LEI *Solvability of Neumann problem for elliptic equations at resonance.*, Nonlinear Anal. 44, 2001, 323-335.

[10] WILLEM,M. - *Minimax theorems.*Progress in Nonlinear Differential Equations and their Aplications, 24. Birkhauser Boston, inc.,Boston, MA, 1996.