Ricci Sóliton Gradiente Shrinking, Completo e Não- Compacto

NETO, Benedito Leandro; **PINA**, Romildo da Silva

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: benedito.leandro@hotmail.com; romildo@mat.ufg.br

Palavras chaves: Variedade Riemanniana, Ricci Sólitons.

1 Introdução

Um importante problema em geometria diferencial é encontrar uma métrica canônica (**uma métrica de curvatura constante**) em uma dada variedade. Por sua vez, a existência de uma métrica canônica muitas vezes tem profundas implicações topológicas. Um bom exemplo é o clássico Teorema de Uniformização em duas dimensões, o qual, por um lado, apresenta uma completa classificação topológica para superfícies compactas e, por outro lado, mostra que toda superfície compacta tem uma estrutura geométrica canônica. Um desenvolvimento poderoso da análise geométrica nos últimos 30 anos tem ocorrido na construção de estruturas geométricas canônicas baseadas em equações diferenciais parciais não-lineares.

Em 1982, Hamilton introduziu o fluxo de Ricci para estudar variedades tridimensionais compactas com curvatura de Ricci positiva. O fluxo de Ricci, é naturalmente análogo a equação do calor para métricas. Como uma consequência, o tensor curvatura evolui de um sistema de equações de difusão que tende a distribuir a curvatura uniformemente sobre toda a variedade. Portanto, é esperado que a métrica inicial deveria melhorar e evoluir para uma métrica canônica, conduzindo a uma melhor compreensão da topologia da variedade. Ao longo de toda a existência das soluções das equações diferenciais parciais existem soluções auto-similares. O nome destas soluções, auto-similares, vem do fato de que a distribuição espacial das características do movimento mantém-se idênticas em todos os momentos. No fluxo de Ricci as soluções auto-similares são chamados de Ricci sólitons. Ricci sólitons surgem, muitas vezes, como limite, superior ou inferior, de singularidades no fluxo de Ricci.

Dizemos que a métrica g_0 é um Ricci sóliton em M (variedade Riemanniana diferenciável completa n- dimensional) se existem $\rho \in \mathbb{R}$ e um campo de vetores $X \in \chi(M)$ tais que

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2}\mathfrak{L}_X g_0 = \rho g_0$$

onde $\mathfrak{L}_X g_0$ é a derivada de Lie da métrica com respeito ao campo X.

Definição 1.1 (A derivada de Lie). Sejam $X, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$, e seja g uma métrica sobre uma variedade diferenciável M. Então a derivada de Lie da métrica é dada por

$$(\mathfrak{L}_X g)(Y_1, Y_2) = g(\nabla_{Y_1} X, Y_2) + g(Y_1, \nabla_{Y_2} X). \tag{1.1}$$

Em coordenadas locais temos que

$$(\mathfrak{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i.$$

Se tomarmos o campo X como o gradiente de uma função diferenciável, $X = \nabla_g f$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável, ou seja, se o campo é um campo gradiente, temos que

$$(\mathfrak{L}_{\nabla_g f} g)_{ij} = g(\nabla_i \nabla_g f, \frac{\partial}{\partial x_j}) + g(\nabla_j \nabla_g f, \frac{\partial}{\partial x_i})$$

podemos assim considerar i=j no caso dessa igualdade, de modo que

$$(\mathfrak{L}_{\nabla_g f} g)_{ij} = 2g(\nabla_i \nabla_g f, \frac{\partial}{\partial x_j}).$$

Agora, sendo $X, Y \in \chi(M)$, sabemos que a hessiana da função f é dada por

$$Hess_g f(X, Y) = g(\nabla_X(\nabla_g f), Y).$$

Portanto,

$$\nabla_i \nabla_j f = (Hess_g f)_{ij} = g\Big(\nabla_i(\nabla_g f), \frac{\partial}{\partial x_j}\Big).$$

Então se o campo é gradiente, temos, em coordenadas locais, que um Ricci Sóliton em M é dado por:

$$\begin{aligned} Ric(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}_{\nabla_g f} g)_{ij} &= R_{ij} + \frac{1}{2}[2g\Big(\nabla_i \nabla_g f, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big)] \\ &= R_{ij} + \frac{1}{2}[2(Hess_g f)_{ij}] \\ &= R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \rho g_{ij}. \end{aligned}$$

Dizemos que o Ricci Sóliton é steady quando $\rho = 0$, shrinking para $\rho > 0$ e expanding se $\rho < 0$. Toda métrica de Einstein é um Ricci Sóliton, basta tomar f constante. Tomando $\rho = \frac{1}{2}$ teremos um ***Ricci Sóliton Gradiente Shrinking*** e a equação de evolução assumirá a forma

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2} g_{ij}.$$

Entretanto, exibir soluções explícitas para os Ricci Sólitons não é uma tarefa simples. H-D. Cao e D. Zhou [1] fazem estimativas, inferiores e superiores, da função potencial em um Ricci sóliton gradiente shrinking, completo e não- compacto. Por isso esse artigo é de fundamental importância, já que encontrar soluções explícitas para a equação de evolução dos Ricci sólitons não é fácil. Com as estimativas para a função potencial o trabalho de Cao e Zhou [1] culmina em estimativas para o volume, superior e inferior.

2 Resultados e Discussão

Começaremos com o resultado principal do artigo [1], que traz as estimativas para a função potencial.

Teorema 2.1. Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci soliton gradiente shrinking completo e não-compacto satisfazendo a equação de evolução. Então, a função potencial f satisfaz a estimativa

$$\frac{1}{4}(r(x) - c_1)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x) + c_2)^2,$$

onde $r(x) = d(x_0, x)$ é a função distância de algum ponto fixado $x_0 \in M$, c_1 e c_2 são constantes positivas que dependem apenas de n e da geometria de g_{ij} na bola unitária $B_{x_0}(1)$.

Em seguida apresentaremos alguns resultados que são necessários para provar o teorema.

Lema 2.1. Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci sóliton gradiente shrinking completo satisfazendo

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2} g_{ij}.$$

Então temos

$$\nabla_i R = 2R_{ij} \nabla_j f,$$

e

$$R + \left|\nabla f\right|^2 - f = C_0$$

para alguma constante C_0, onde R representa a curvatura escalar de g_{ij}. Como consequência desse resultado, temos que

$$R + \left|\nabla f\right|^2 - f = 0. \tag{2.2}$$

Lema 2.2. Seja (M^n, g_{ij}, f) um gradiente Ricci soliton encolhido completo. Então g_{ij} tem curvatura escalar não-negativa, $R \geq 0$.

Com tais Lemas, podemos dar uma estimativa superior para a função potencial.

Lema 2.3. Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Soliton gradiente shrinking completo satisfazendo

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2} g_{ij}$$

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{1}{4}(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2, \\ |\nabla f|(x) &\leq \frac{1}{2} r(x) + \sqrt{f(x_0)}, \\ e \quad R(x) &\leq \frac{1}{4}(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2. \end{aligned}$$

Aqui, $r(x) = d(x_0, x)$ é a função distância de algum ponto fixo $x_0 \in M$.

Prova. Pelo lema (2.2) $R \geq 0$ e sendo $f > 0$. Então, por (2.1) temos que

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0$$

e, então,

$$0 \leq |\nabla f|^2 \leq f. \tag{2.3}$$

A desigualdade é equivalente a $|\nabla \sqrt{f}| \quad \leq \quad \frac{1}{2}$. Daí,

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)} &\leq \left| \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)} \right| \leq \frac{1}{2} r(x) \\ \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)} &\leq \frac{1}{2} r(x) \\ \sqrt{f(x)} &\leq \frac{1}{2} r(x) + \sqrt{f(x_0)} \\ f(x) &\leq \frac{1}{4} \left(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)} \right)^2. \end{aligned}$$

□

A prova da estimativa inferior segue de maneira análoga à prova da estimativa superior.

O teorema seguinte nos dá uma limitação superior para o volume da bola geodésica.

Teorema 2.2. Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Soliton gradiente shrinking, completo e não-compacto. Então, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$Vol(B_{x_0}(r)) \leq C_1 r^n$$

para $r > 0$ suficientemente grande.

Uma combinação desses dois teoremas nos dá o seguinte resultado:

Corolário 2.1. Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci soliton gradiente Shrinking completo e não-compacto. Então nós temos

$$\int_M |u| e^{-f} dV < +\infty$$

para qualquer função u em M com $|u(x)| \leq Ae^{\alpha r^2(x)}, 0 \leq \alpha < \frac{1}{4}$ e A>0. Em particular, o volume ponderado de M é finito,

$$\int_M e^{-f} dV < +\infty.$$

3 Conclusões

Concluímos que, embora seja difícil encontrar soluções explícitas para os Ricci Sólitons Gradientes Shrinking, completos e não- compactos, podemos restringir o universo das funções potenciais que satisfazem a equação de evolução.

Referências

[1] Cao, H.-D., Zhou, D. - *On Complete Gradient Shrinking Ricci Solitons*, J. Differential Geom, 85, 175-186 (2009).

[2] Cao, H.-D. - *Recent progress on Ricci solitons, to appear in Proceedings of 2007 International Conference on Geometric Analysis*, Proc. International Conference on Geometric Analysis, (2007).

[3] Perelmann, G. - *Ricci flow with surgery on three manifolds, arXiv:math.DG/0303109.*

[4] Chow,B., Lu, P., Ni, L. - *Hamilton's Ricci Flow*, Science Press, China, 2005.

[5] Carrillo, J.A., Ni, L. - *Sharp Logarithmic Sobolev Inequalities On Gradients Solitons And Applications, arXiv:0806.2417v3*, (2009).

[6] Carmo, M.P.D. - *Geometria Riemanniana*, Four Edition, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.