Superfícies Helicóidais com Curvatura Gaussiana ou Média Dada.

Souza, Danillo Flugge; **Pina**, Romildo da Silva

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: fluggematematica@hotmail.com; romildo@mat.ufg.br

Palavras chaves: Superfícies Helicóidais, , Curvaturas Gaussiana e Média, Movimento Helicóidal.

1 Introdução

Uma superfície M no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, dada por

$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \lambda(u) + hv)$$

, onde h é uma constante e $\lambda(u)$ é uma função C^2, é dit ser uma superfície helicóidal com eixo Oz e inclinação h. Se $h = 0$, então a superfície helicóidal é justamente uma superfície de revolução. A superfície M pode ser construída por uma curva através de um movimento helicóidal, i.e. um movimento rígido $g_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $g_t(x,y,z) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, z + ht)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, uma superfície helicóidal é invariante sobre g_t para todo t. A curvatura média H e a curvatura Gaussiana K de M dependem somente de u e são dadas por equações diferenciais não-lineares de segunda ordem. A proposta deste trabalho é resolver estas equações. As soluções são apresentadas explicitamente por integrais. Além disso dada uma função diferenciável $H : I \subset \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ e $h \in R$, então para qualquer $u_0 \in I$ podemos encontrar uma família de curvas a dois parâmetros $\gamma(u, H, c_1, c_2)$ definidas em uma vizinhança de u_0. Aplicando um movimento helicóidal em γ temos uma família a dois parâmetros de superfícies helicóidais com curvatura média H e inclinação h. Analogamente podemos construir uma família a dois parâmetros de superfícies helicóidais com curvatura Gaussiana K dada e inclinação h.

2 Resultados e Discussões

Os casos $H = constante$ ou $K = constante$ foram estudados por Do Carmo e Dajczer[2]. Especialmente para $h = 0$ e uma função arbitrária H, Kenmotsu [4] generalizou um antigo resultado de Delaunay [1], construindo superfícies de revolução globais com curvatura média

H. Seja $\gamma(u) = (u, 0, \lambda(u)), u \in I$ uma curva C^2 definida em qualquer intervalo aberto I de números reais não incluindo o zero. Aplicando um movimento helicóidal em γ definimos a superfície helicóidal

$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \lambda(u) + hv). \tag{2.1}$$

A primeira forma fundamental I, a segunda forma fundamental II e a aplicação de Gauss n de M são dadas por

$$I = (1 + (\lambda')^2)du^2 + 2h\lambda' dudv + (u^2 + h^2)dv^2$$

$$II = \frac{1}{\alpha}(u\lambda'' du^2 - 2hdudv + u^2\lambda' dv^2)$$

$$n = \frac{1}{\alpha}(h\sin v - u\lambda'\cos v, -u\lambda'\sin v - h\cos v, u),$$

onde $\alpha = (u^2(1 + (\lambda')^2) + h^2)^{1/2}$ e o símbolo ($'$) denota derivada em relação a u. Segue que a curvatura média H e Gaussiana K da superfície são dadas por

$$H = \frac{(u^2 + h^2)u\lambda'' + (1 + (\lambda')^2)u^2\lambda' + 2h^2\lambda'}{2[u^2(1 + (\lambda')^2) + h^2]^{3/2}} \tag{2.2}$$

e

$$K = \frac{u^3\lambda'\lambda'' - h^2}{[u^2(1 + (\lambda')^2) + h^2]^2}. \tag{2.3}$$

Notemos que se $\lambda' = 0$, a superfície helicoidal (2.1) é justamente um helicóide.

Vamos agora estudar a equação (2.2). A equação (2.2) pode ser escrita como

$$2H = 2A + uA', \tag{2.4}$$

onde

$$A = \lambda'[u^2(1 + (\lambda')^2) + h^2]^{-1/2}. \tag{2.5}$$

Então, para $u \neq 0$, temos de (2.4) que

$$A' + \frac{2}{u}A = 2\frac{H}{u}. \tag{2.6}$$

A solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem é

$$A = u^{-2}(2\int Hudu + c_1), \tag{2.7}$$

onde c_1 é uma constante de integração. Combinando (2.5) e (2.7) temos

$$\lambda' = u^{-2}(2\int Hudu + c_1)[u^2(1 + (\lambda')^2) + h^2]^{1/2},$$

ou

$$u^2(u^2 - (2\int Hudu + c_1)^2)(\lambda')^2 = (u^2+h^2)(2\int Hudu + c_1)^2). \tag{2.8}$$

Mas $u^2 - (2\int Hudu + c_1)^2) = u^2(u^2+h^2)[u^2(1+(\lambda')^2)+h^2]^{-1} > 0$, para $u \neq 0$. Então integrando (2.8) temos a solução geral

$$\lambda(u) = \pm \int \frac{(u^2+h^2)^{1/2}|2\int Hudu + c_1|}{|u|(u^2-(2\int Hudu + c_1)^2)^{1/2}} du + c_2 \tag{2.9}$$

onde c_2 é uma constante de integração. Reciprocamente, seja $h \in \mathbb{R}$ e $H(u)$ funções reais diferenciáveis definidas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R} - 0$. Então para qualquer $u_0 \in I$, existe um intervalo aberto I' de $u_0 (I' \subset I)$ e um intervalo aberto A de $\mathbb{R}$ contendo

$$c_1' = -(2\int Hudu)(u_0),$$

tal que a função $F(u,c) = u^2 - (2\int Hudu + c)^2 > 0$ para qualquer $(u,c) \in I' \times A$. Daí para qualquer $(u, c_1) \in I' \times A, c_2 \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}$ e dada função $H(u)$ podemos definir uma família a dois parâmetros de curvas

$$\gamma(u, H(u), h, c_1, c_2) = (u, 0, \pm \int \frac{(u^2+h^2)^{1/2}|2\int Hudu + c_1|}{|u|[u^2-(2\int Hudu + c_1)^2]^{1/2}} du + c_2).$$

Aplicando um movimento helicóidal de inclinação h nestas curvas temos então uma família a dois parâmetros de superfícies helicóidais com curvatura média $H(u), u \in I'$ e inclinação h. Com isto temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1. Seja $(u, 0, \lambda(u))$, $u \in I$ uma curva gerando a superfície helicóidal (2.1), cuja curvatura média no ponto $(u, 0, \lambda(u))$ é dada por $H(u)$. Então, para algumas constantes c_1, c_2 e h, temos $(u, 0, \lambda(u)) = \gamma(u, H(u), h, c_1, c_2)$. Reciprocamente, seja $h \in \mathbb{R}$ e $H(u), u \in I$, uma função diferenciável. Então para qualquer $u_0 \in I$ podemos construir uma família a dois parâmetros de curvas $\gamma(u, H(u), h, c_1, c_2)$, $u \in I'$ e então uma família a dois parâmetros de superfícies helicóidais com curvatura média $H(u), u \in I'$ e inclinação h.

Vamos agora estudar a equação (2.3).

A equação (2.3) pode ser escrita

$$(B^2)' = 2Ku, \tag{2.10}$$

onde

$$B^2 = \frac{u^2(\lambda')^2 + h^2}{u^2(1+(\lambda')^2)+h^2} \tag{2.11}$$

Integrando (2.10) temos

$$B^2 = 2\int Kudu + c_1, \tag{2.12}$$

onde c_1 é uma constante de integração. Combinando (2.11) e (2.12) tem-se

$$(1 - c_1 - 2\int Kudu)u^2(\lambda')^2 = (u^2 + h^2)(2\int Kudu + c_1) - h^2. \tag{2.13}$$

Como $1 - c_1 - 2\int Kudu = u^2[u^2(1 + (\lambda')^2 + h^2)]^{-1} > 0$, para $u \neq 0$, devemos ter que

$$(u^2 + h^2)(2\int Kudu + c_1) - h^2 > 0.$$

Integrando (2.13) obtemos a solução geral

$$\lambda(u) = \pm\int \frac{[(u^2 + h^2)(2\int Kudu + c_1) - h^2]^{1/2}}{|u|(1 - c_1 - 2\int Kudu)^{1/2}}du + c_2. \tag{2.14}$$

Reciprocamente, seja $h \in \mathbb{R}$ e $K(u)$ uma função diferenciável em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R} - 0$. Então para qualquer $u_0 \in I$, existe um intervalo aberto I' de u_0 $I' \subset I$ e um intervalo aberto A de $\mathbb{R}$ contendo $c_1' = -(2\int Kudu)(u_0)$, tal que $1 - c_1 - 2\int Kudu > 0$ para qualquer $u \in I'$ e $c_1 \in A$. Daí para qualquer $u \in I'$,$c_1 \in A$,$c_2 \in \mathbb{R}$ podemos definir uma família a dois parâmetros de curvas

$$\beta(u, K(u), h, c_1, c_2) = (u, 0, \int \frac{[(u^2 + h^2)(2\int Kudu + c_1) - h^2]^{1/2}}{|u|(1 - c_1 - 2\int Kudu)^{1/2}}du + c_2). \tag{2.15}$$

Aplicando um movimento helicóidal nestas curvas temos então uma família a dois parâmetros de superfícies helicóidais com curvatura Gaussiana $K(u)$,$u \in I'$ e inclinação h. Com isto provamos o seguinte teorema.

Teorema 2.2. Seja $(u, 0, \lambda(u))$,$u \in I$ uma curva que gera a superfície helicóidal (2.1), cuja curvatura Gaussiana no ponto $(u, 0, \lambda(u))$ é dada por $K(u)$. Então para algumas constantes c_1, c_2 e h temos $(u, 0, \lambda(u)) = \beta(u, K(u), h, c_1, c_2)$. Reciprocamente, seja $h \in \mathbb{R}$,$u \in I$ uma função diferenciável. Então para qualquer $u_0 \in I$ podemos construir a família a dois parâmetros de curvas $\beta(u, K(u), h, c_1, c_2)$,$u \in I'$, e então uma família a dois parâme-tros de superfícies helicóidais com curvatura Gaussiana $K(u)$,$u \in I'$ e inclinação h.

3 Conclusão

Concluímos que dadas duas funções diferenciáveis $H(u)$ ou $K(u)$ podemos construir superfícies helicóidais admitindo $H(u)$ como curvatura Média ou $K(u)$ como curvatura Gaussiana de M.

Referências

[1] DELAUNAY,G . *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constant*, J.Math.Pures Appl, Series 1, 6, 309-320 (1841).

[2] DO CARMO,M. DAJCZER,M . *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*, Tôhoku Math.J. 34, 425-435 (1982).

[3] HITT,L.ROUSSOS,I . *Computer graphics of helicoidal surfaces with constant mean curvature*, An.Acad.bras.Ci.,63,211-228 (1991).

[4] KENMOTSU,K . *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*, Tôhoku Math.J.32,147-153 (1980).