

# Automorfismos Coprimos em Grupos Profinitos

LIMA, Márcio Dias de; LIMA, Aline de Souza, CALDEIRA, Jhone

*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II - Caixa*

*Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.*

E-mail: marciolima9@hotmail.com; alinelima@mat.ufg.br; jhone@mat.ufg.br

**Palavras chaves:** anéis de Lie, centralizadores de automorfismos coprimos, grupos localmente finitos, grupos profinitos.

## 1 Introdução

Sejam  $G$  um grupo finito e  $\alpha$  um automorfismo de  $G$ . Denotamos o centralizador de  $\alpha$  em  $G$ , ou subgrupo de pontos fixos, por  $C_G(\alpha) = \{x \in G \mid x^\alpha = x\}$ . Se  $C_G(\alpha) = 1$ , dizemos que  $\alpha$  é livre de pontos fixos e se a ordem de  $\alpha$  é coprima com a ordem de  $G$ , então  $\alpha$  é um automorfismo coprimo de  $G$ . Burnside [1] mostrou que um grupo  $G$  admitindo um automorfismo de ordem 2 livre de pontos fixos é abeliano. Este foi o primeiro resultado significativo a respeito da existência de automorfismos livres de pontos fixos implicar em conclusões substanciais em relação à estrutura do grupo. Burnside também analisou o caso em que o automorfismo é de ordem 3 e provou que tal grupo é necessariamente nilpotente de classe no máximo 2. Sabe-se que com o estudo de centralizadores de automorfismos de grupos finitos podemos obter várias informações importantes sobre o grupo em questão. Outro exemplo dessa influência dos centralizadores de automorfismos na estrutura de grupos é devido a Higman [4] e Thompson [12] que mostraram que se  $G$  admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima  $p$ , então  $G$  é nilpotente com classe de nilpotência limitada por uma função dependendo somente de  $p$ .

Khukhro e Shumyatsky [5], mostraram que se  $p$  é um primo,  $e$  um inteiro positivo e  $A$  um  $p$ -grupo abeliano elementar de ordem  $p^2$  agindo sobre um  $p'$ -grupo finito  $G$ , e se o expoente de  $C_G(a)$  divide  $e$  para todo  $a \in A^\#$ , então o expoente de  $G$  é limitado por uma função dependendo somente de  $e$  e  $p$ . Aqui  $A^\#$  denota o conjunto de elementos de  $A$  diferentes da identidade. Lembramos que um grupo  $G$  tem expoente  $n$  se  $x^n = 1$ , para todo  $x \in G$ .

Este fenômeno em que a estrutura dos centralizadores de automorfismos do grupo induzem a mesma estrutura no grupo faz sentido quando a ordem do automorfismo é coprima com a ordem de  $G$ , pois nesse caso  $G$  é gerado por estes centralizadores. Seja  $G$  um

grupo admitindo uma ação de um grupo  $A$ . Denotaremos por  $C_G(A)$  o conjunto formado por todos os elementos de  $G$  fixados por  $A$ . É fácil ver que  $C_G(A)$  é um subgrupo de  $G$ . Se  $A$  é grupo abeliano não cíclico e a ordem de  $A$  é coprima com a ordem de  $G$ , então  $G = \langle C_G(a) \mid a \in A^\# \rangle$ .

Seja  $F$  o grupo livre sobre  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Uma palavra positiva em  $X$  é qualquer elemento não-trivial de  $F$  não envolvendo os inversos de  $x_i$ . Uma lei positiva de um grupo  $G$  é uma identidade não-trivial da forma  $u \equiv v$ , onde  $u, v$  são palavras positivas, fixadas sob toda substituição  $X \rightarrow G$ . O comprimento máximo de  $u$  e  $v$  é chamado grau da lei  $u \equiv v$ .

Shumyatsky [9] mostrou que se  $A$  é um  $q$ -grupo abeliano elementar de ordem  $q^3$  agindo sobre um  $q'$ -grupo  $G$  finito tal que  $C_G(a)$  satisfaz uma lei positiva de grau  $n$  para qualquer  $a$  em  $A^\#$ , então  $G$  satisfaz uma lei positiva de grau limitado por uma função dependendo somente de  $q$  e  $n$ . Em outro trabalho, Shumyatsky [10] mostra que se  $A$  tem ordem  $q^4$  e  $C_G(a)'$  satisfaz uma lei positiva de grau  $n$ , para todo  $a$  em  $A^\#$ , então  $G'$  satisfaz uma lei positiva de grau limitado por uma função dependendo somente de  $q$  e  $n$ .

Uma generalização desses resultados é dada por Lima e Shumyatsky [6], onde  $A$  é um  $q$ -grupo abeliano elementar de ordem  $q^2$  agindo sobre um  $q'$ -grupo  $G$  finito, de tal forma que o subgrupo  $\langle C_G(a), C_G(b) \rangle$  satisfaz uma lei positiva de grau  $n$  para  $a, b$  em  $A^\#$ . Neste caso, o grupo  $G$  satisfaz uma lei positiva de grau limitado por uma função que depende somente de  $q$  e  $n$ .

Outro questionamento frequente na Teoria dos Grupos é como as imagens finitas de um grupo afetam sua estrutura. Hirsch, em 1946, mostrou que se todo quociente de um grupo policíclico-por-finito  $G$  é nilpotente, então  $G$  é nilpotente. Grunewald-Pickel-Segal em 1980, mostrou que existe um número finito de isomorfismos de grupos policíclico-por-finito com os mesmos quocientes de  $G$ . Questionamentos como esses motivaram as pesquisas na Teoria dos Grupos Profinitos. Um grupo profinito é um grupo topológico isomorfo a um limite inverso de grupos finitos, ou de modo equivalente um espaço de Hausdorff, compacto e totalmente desconexo.

$$G \cong \varprojlim (G/U)_{U \triangleleft_o G} \subseteq \prod (G/U)_{U \triangleleft_o G} \quad (U \text{ subgrupo normal aberto de } G).$$

Outra importante motivação para o estudo desses grupos é que eles respondem de forma positiva ao Problema Restrito de Burnside: um grupo profinito finitamente gerado de expoente finito é finito. Estamos interessados na influência dos centralizadores de automorfismos

coprimos em grupos profinitos. Evidentemente, que para isso, devemos transpor esses conceitos de centralizadores de automorfismos para o contexto topológico.

No contexto de grupos profinitos, todos os conceitos usuais da teoria de grupos são interpretadas topologicamente. Em particular, por um automorfismo de um grupo profinito, entende-se um automorfismo contínuo. Um grupo de automorfismo  $A$  de um grupo profinito  $G$  é chamado de coprimo se  $A$  tem ordem finita e  $G$  é o limite inverso de grupos finitos cujas ordens são relativamente primas com a ordem de  $A$ .

Dado um automorfismo  $a$  de um grupo profinito  $G$ , denotamos por  $C_G(a)$  o centralizador de  $a$  em  $G$ , que é o subgrupo de  $G$  formado pelos elementos fixados por  $a$ , que é sempre fechado.

O lema a seguir é bem conhecido no caso onde  $G$  é um grupo finito (veja [2], 6.2.2, 6.2.4). Essa versão para grupos profinitos segue do caso finito por um argumento rotineiro de limite inverso.

**Lema 1.1.** Seja  $A$  um grupo de automorfismos de um grupo profinito  $G$ .

- a) Se  $N$  é um subgrupo normal fechado  $A$ -invariante de  $G$ , então  $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$ ;
- b) Se  $A$  é um grupo abeliano elementar de ordem  $q^2$ , então  $G = \langle C_G(a); a \in A^\# \rangle$ .

Motivados pelo resultado apresentado por Khukhro e Shumyatsky [5], citado no segundo parágrafo deste texto, e pelo lema citado acima, questionamos a influência dos centralizadores de automorfismos na estrutura dos grupos profinitos. Será possível observar os mesmos resultados obtidos para grupos finitos?

As discussões que apresentamos aqui provêm do trabalho de dissertação de mestrado em matemática do primeiro autor e são baseadas no trabalho de Shumyatsky [8].

## 2 Material e Método

O objetivo central deste trabalho é obter resultados a respeito de condições de finitude em grupos abstratos. A metodologia empregada no sentido de obter propriedades interessantes para grupos, baseia-se no estudo da influência dos centralizadores de automorfismos na estrutura dos grupos profinitos. Fica o seguinte questionamento: será possível observar os mesmos resultados obtidos para grupos finitos? As técnicas empregadas nas demonstrações dos principais resultados são técnicas combinatórias e podem ser encontradas em [8].

### 3 Resultados e Discussão

O objetivo do nosso trabalho é demonstrar o seguinte resultado

**Teorema 3.1.** Sejam  $q$  um número primo e  $A$  um grupo abeliano elementar de ordem  $q^2$ . Suponha que  $A$  age como um grupo de automorfismos coprimos sobre um grupo profinito  $G$ . Suponha que  $C_G(a)$  é periódico para cada  $a \in A^\#$ . Então  $G$  é localmente finito.

Com o intuito de demonstrar o Teorema 3.1, restringimos o problema ao caso onde  $G$  é um pro- $p$  grupo, ou seja, o limite inverso de  $p$ -grupos, conforme a proposição abaixo.

**Proposição 3.1.** Seja  $q$  um número primo e  $A$  um grupo abeliano elementar de ordem  $q^2$ . Suponha que  $A$  age como um grupo de automorfismos coprimo sobre um pro- $p$  grupo  $G$ . Suponha que  $C_G(a)$  é periódico para cada  $a \in A^\#$ . Então  $G$  é localmente finito.

Para concluirmos esse resultado, faremos uso da série de Jennings-Lazard-Zassenhaus,

$$D_n(G) = \prod_{ip^k \geq n} \gamma_i(G)^{p^k}.$$

Obtemos por meio dessa série uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{F}_p$  (corpo com  $p$ -elementos). Essa álgebra será denotada por  $L(G) = \bigoplus D_i/D_{i+1}$ .

As técnicas de construção, associando a um grupo um anel de Lie, foram introduzidas nos anos 30 do século passado por Zelmanov, como uma ferramenta no auxílio à resolução do Problema Restrito de Burnside.

Juntamente com a Proposição 3.1, outros resultados nos auxiliam na conclusão do Teorema 3.1. Em 1983, Wilson [13], demonstra que se todo subgrupo de Sylow de um grupo profinito periódico é localmente finito, então o grupo é localmente finito. E no ano de 1979, Herfort [3], mostra que o conjunto dos primos divisores das ordens dos elementos de um grupo profinito periódico é necessariamente finito.

Uma vez que não há solução do problema de expoente para grupos profinitos periódicos, apresentaremos uma prova do Teorema 3.1, que não se refere ao expoente, porém a estrutura geral da prova do Teorema 3.1 é semelhante à do resultado em Khukhro e Shymyatsky [5].

### 4 Conclusões

O estudo envolvendo grupos profinitos é muito interessante, visto que há uma interação entre as áreas relativas à Álgebra e Topologia, onde o grupo é visto como um espaço topológico.

Isto enriquece ainda mais a pesquisa matemática. Também percebemos que o estudo sobre centralizadores de automorfismos de um grupo torna-se uma ferramenta importante na tentativa de obter informações sobre grupos.

Conseguimos, então, apresentar uma demonstração da finitude local de um grupo, onde um grupo de automorfismos coprimos de ordem  $q^2$  age sobre um grupo profinito  $G$  e  $C_G(a)$  é periódico, para cada  $a$  não trivial.

## Referências

- [1] W. Burnside - *Theory of Groups*, 2nd edition. New York, (1955).
- [2] D. Gorenstein - *Finite Groups*, Evaston, London: Harper & Row, New York, (1968).
- [3] W. Herfort - *Compact Torsion Groups and Finite Exponent*, Arch Math 33. 404-410, (1979).
- [4] G. Higman - *Groups e lie rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements*, J. London. Math. Soc. 32, 321-334, (1957).
- [5] E. I. Khukhro; P. Shumyatsky - *Bounding the Exponent of a Finite Group with Automorphisms*, J. Algebra 212, 363-374, (1999).
- [6] A. Lima; P. Shumyatsky - *On groups satisfying a positive law in fixed points*, J. Algebra 322, 245-253, (2009).
- [7] P. Shumyatsky - *On Periodic Soluble Groups and Fixed Point Group of Operators*, Comm. Algebra 20(10), (1992).
- [8] P. Shumyatsky - *Coprime Automorphisms of Profinite Groups*, Quart. J. Math. 53, 371-376, (2002).
- [9] P. Shumyatsky - *Positive Laws in Fixed Points*, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (5), 2081-2091, (2004).
- [10] P. Shumyatsky - *Positive Laws in Derived Subgroups of Fixed Points*, Q. J. Math., (2008).
- [11] P. Shumyatsky; J. C. Silva - *Varieties of Groups and the Restricted Burnside Problem*, Ischia Group Theory 2008, World Scientific, (2009).
- [12] J. G. Thompson - *Finite Groups With Fixed-Point-Free Automorphisms of Prime Order*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, 578-581, (1959).
- [13] J. S. Wilson - *On the Structure of Compact Torsion Groups*, Monatshefte fur Mathematik 96, 57-66, (1983).
- [14] E. Zelmanov - *On Periodic Compact Groups*, Israel J. Math 77, 83-95, (1992).