Grupos Satisfazendo Leis Positivas e Variedades Nilpotentes-por-Burnside

NASCIMENTO, Natália Silva; **CALDEIRA**, Jhone; **LIMA**, Aline de Souza

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II - Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: natynasc@gmail.com; jhone@mat.ufg.br; alinelima@mat.ufg.br

Palavras chaves: Palavra positiva, lei positiva, semigrupo, variedade de Burnside.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudaremos a estrutura de grupos satisfazendo uma lei positiva, ou seja, uma identidade da forma $u \equiv v$, onde u e v são palavras positivas. A questão principal é saber quando tais grupos são extensão de grupos nilpotentes por grupos de expoente finito. Estudaremos a resposta afirmativa a essa questão para uma larga classe C de grupos, incluindo grupos solúveis e residualmente finitos, mostrando que, além disso, as classes de grupos nilpotentes e de grupos de expoente finito em questão são as únicas limitadas em termos do comprimento da lei positiva. Veremos também que, em particular, se a variedade de grupos é localmente finita e nilpotente, então ela pode, de fato, estar contida em um produto de uma variedade nilpotente por uma variedade localmente finita de expoente finito. Disso seguem corolários interessantes, por exemplo, que grupos de livres de torção, residualmente finitos, n-Engel são nilpotentes de classe limitada em termos de n. Ainda, consideraremos a questão de Bergman para saber se uma lei positiva em uma generalização de um subsemigrupo de um grupo deve ser de fato uma lei em todo o grupo, mostrando que ela tem uma resposta afirmativa para grupos solúveis. Todas as nossas discussões estão baseadas nos trabalhos de Burns, Macedońska e Medvedev [2] e Fernández-Alcober e Shumyatsky [4].

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Nossos estudos e demonstrações a respeito dessas questões e resultados são baseados fortemente nos trabalhos de Shalev [12] sobre os grupos finitos satisfazendo uma lei positiva e vários trabalhos de Zelmanov [15-18] sobre o Problema Restrito Burniside, condições de Engel e anéis de Lie, além de resultados de Lubotzky e Mann [9] sobre p-grupos potentes.

Definição 2.1. Seja F um grupo livre sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Dizemos que um elemento da forma $x_{i_1}^{m_1} x_{i_2}^{m_2} \cdots x_{i_k}^{m_k}$ é uma *palavra positiva* se x_i é um elemento não trivial de F e tal elemento não envolve os inversos de x_i, ou seja, $k \geq 1$ e $m_j \geq 1$ para $j = 1, \ldots, k$. Uma lei positiva (ou de semigrupo) de um grupo G é uma identidade não trivial da forma $u \equiv v$, onde u e v são palavras positivas em F, sobre toda substituição $X \to G$. O *grau* de uma lei é o máximo dos comprimentos dentre u e v.

Neste trabalho, estudaremos uma estrutura de grupos satisfazendo uma *lei positiva* por um resultado de *Mal'cev*: Um grupo que é a extensão de um grupo nilpotente por um grupo de expoente finito satisfaz uma lei positiva. A questão principal de nosso interesse é discutir a veracidade da recíproca.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Questão 1. Se um grupo G satisfaz uma lei positiva, então G deve ser uma extensão de um grupo nilpotente por um grupo finito?

Olshanskii e Storozhev [10] têm mostrado que em geral a resposta dessa questão é falsa. Eles exibem um exemplo de um grupo *2-gerado* satisfazendo uma lei positiva que não é uma extensão de um grupo nilpotente por um grupo finito. Mas existe um outro resultado, enunciado mais tarde, que nos dá uma resposta afirmativa para uma larga classe C de grupos incluindo os grupos solúveis e residualmente finitos. Além disso, é possível considerar uma outra ilustração para a dicotomia indicada. Em particular, pela diferença da metodologia e dos resultados associados com, por um lado, a solução positiva do Problema Restrito de Burnside e, por outro lado, a solução negativa do Problema Geral de Burniside, dentre os grupos obtidos por um caminho padrão via abordagens para grupos solúveis e localmente finitos, o que não é o caso dos exemplos apresentados.

Para um inteiro positivo e, denotamos por $\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}}$ a variedade de Burnside restrita de expoente e, ou seja, a variedade gerada por todos os grupos finitos de expoente e. Também definimos um *SB-grupo* como sendo igual a um produto de muitas (finitas) variedades onde cada uma delas é ou solúvel ou $\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}}$ (para algum e).

Teorema 3.1 (2)**.** Seja n um inteiro positivo. Existem funções $c(n)$ e $e(n)$, dependendo apenas de n, tal que um *SB-grupo* G satisfazendo uma lei positiva de grau n é uma extensão de um grupo nilpotente de classe no máximo $c(n)$ por um grupo localmente finito de expoente dividindo $e(n)$, isto é,

$$G \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{c}(\mathfrak{n})}\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}(\mathfrak{n})},$$

onde $\mathfrak{N}_{\mathfrak{c}(\mathfrak{n})}$ denota a variedade de todos os grupos nilpotentes de classe no máximo $c(n)$.

A dependência de n nos parâmetros $c(n)$ e $e(n)$ do teorema anterior tem como consequência que se em um grupo G todo subgrupo finitamente gerado é um *SB-grupo* e satisfaz a lei positiva (possivelmente dependendo do subgrupo) de grau no máximo n, então $G \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{c}(\mathfrak{n})}\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}(\mathfrak{n})}$. Similarmente, se G é um produto subcartesiano de *SB-grupos* todos satisfazendo uma lei positiva de grau no máximo n, então novamente $G \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{c}(\mathfrak{n})}\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}(\mathfrak{n})}$.

Seja C uma classe de grupos obtidos pela classe de todos os *SB-grupos* por repetidas aplicações das operações L e R, onde para todo grupo em uma classe X de grupos, LX é a classe de todos os grupos localmente X e RX é a classe dos grupos residualmente X. Em particular, grupos residualmente finitos e grupos localmente solúveis pertencem a C. Veremos a seguinte extensão do Teorema 3.1.

Teorema 3.2 (2)**.** Se um grupo G pertence a classe C e satisfaz uma lei positiva de grau n, então

$$G \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{c}(\mathfrak{n})}\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}(\mathfrak{n})}.$$

Para G residualmente finito isto melhora o Teorema A devido a Shalev [12], que afirma que um grupo residualmente finito satisfazendo uma lei positiva é uma extensão de um "grupo fortemente localmente nilpotente" por um grupo de expoente finito. Entendemos por um grupo fortemente localmente nilpotente um grupo que gera variedades localmente nilpotentes.

Segue do Teorema 3.1 que de fato um tal grupo pertence a $\mathfrak{N}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}}$, para alguns c e e.

Teorema 3.3. Uma variedade $\mathfrak{B}$ de grupos é localmente nilpotente-por-finito (isto é, todos os seus subgrupos finitamente gerados são extensões de um grupo nilpotente por um finito) se, e somente se,

$$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{N}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}}$$

para alguns c e e.

Questão 2 (Questão de Bergman)**.** Sejam G um grupo e $S \subseteq G$ algum subsemigrupo gerador de G. Existe alguma lei positiva satisfeita por S (isto é, valendo sobre todas as substituições $X \to S$) sendo na verdade satisfeita por G ?

Burns, Macedońska e Medvedev [2] afirmam que Ivanov e Rips têm independentemente construído exemplos mostrando que a resposta em geral para a questão de Bergman é negativa.

Teorema 3.4. A questão de Bergman tem uma resposta afirmativa para grupos solúveis: se G é um grupo solúvel (ou um pouco mais geral, uma extensão de um grupo solúvel por um grupo localmente finito de expoente finito) e $S \subseteq G$ é um subsemigrupo gerador satisfazendo uma lei positiva, então essa lei vale em G (daí, pelo Teorema 3.1, G está realmente em $\mathfrak{N}_{\mathfrak{c}(\mathfrak{n})}\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}(\mathfrak{n})}$, onde n é o grau da lei positiva).

Burns, Macedońska e Medvedev [2] conjecturaram que este resultado se mantém em geral para SB-grupos, e consequentemente, para os grupos em C. Também afirmam ser capazes de mostrar que para alcançar esta extensão do teorema anterior é suficiente impor que G seja uma extensão de um grupo localmente finito de expoente finito por um grupo nilpotente.

4 CONCLUSÕES

Acreditamos que realizando essas discussões e aprofundando o estudo das demonstrações dessas questões e teoremas, poderemos interagir de forma bastante interessante com importantes problemas em discussão pela comunidade matemática, em especial, pelos pesquisadores na área de Álgebra e Teoria dos Grupos. Estas abordagens nos permitirão conhecer fortemente resultados de Shalev [12], de Burns & Macedońska & Medvedev [2] e de Fernández-Alcober & Shumyatsky [4] sobre grupos finitos satisfazendo uma lei positiva e outros de Zelmanov [15-18] a respeito do Problema Restrito de Burnside e anéis de Lie com condições de Engel, além de importantes trabalhos de Lubotzky e Mann [9] sobre p-grupos potentes.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R. G. Burns, Y. Medvedev, *A note on Engel groups and local nilpotence*, J. Austral.Math. Soc. (Series A) 64 (1998), 92-100.

[2] R. G. Burns, O. Macedońska, Y. Medvedev, *Groups satisfying semigroup laws, and nilpotent-by-Burnside varieties*. J. Algebra 195 (1997), no. 2, 510-525.

[3] W. Burnside, *Theory of Groups*, 2.ed. edition, Dover, New Yok, 1955.

[4] G. Fernández-Alcober, P. Shumyatsky, *Positive laws on large sets of generators and on word values*. Ischia Group Theory 2006, 125-137, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.

[5] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*. 2.ed., New York, J. Wiley & Sons, 1995.

[6]N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra*. II, Van Nostrand, 1953.

[7]N. Jacobson, *Lie Algebras*. New York, Interscience, 1962.

[8] M. I. Kargapolov, Ju. I. Merzljakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[9] A. Lubotzky, A. Mann, *Powerful p-groups*, I. Finite groups, J. Álgebra 105 (1987), 484-505.

[10] A. Yu. Olshanskii, A. Storozhev, *A group variety defined by a semigroup law* J. Austral. Math. Soc. Ser. A 60 (1996), 255-259.

[11] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 80, Springer-Verlag, New York, 1996.

[12] A. Shalev, *Combinatorial conditions in residually finite groups*, II, J. Algebra 157 (1993) 51-62.

[13] P. Shumyatsky, J. C. Silva, *Varieties of Groups and the Restricted Burnside Problem*, Ischia Group Theory 2008, World Scientific, 2009.

[14] J. C. Silva, *Variedades de Grupos e Generalizações Verbais para o Problema Restrito de Burnside*, Universidade de Brasília, Tese de Doutorado, 2009.

[15] E. Zelmanov, *Engel Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 292 (1987), 265-268.

[16] E. Zelmanov, *The solution of the Restricted Burnside Problem for groups of odd exponent*. Math. USSR Izvestija 36, 1991, 41-60.

[17] E. Zelmanov, *The solution of the Restricted Burnside Problem for 2-groups*, Math. Sb. 182, 1991, 568-592.

[18] E. Zelmanov, *Nil rings and periodic groups*, The Korean Math. Soc. Lecture Notes in Math., Seoul, (1992).