# Campo de vetores definidos em variedades com bordo

**Furlan**, Pablo Vandré Jacob [1]; **Medrado**, João Carlos da Rocha [2]

*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.*

E-mail: supertauren@gmail.com; medrado@mat.ufg.br

**Palavras chaves:** Campos de vetores sobre variedades, Espaços de jatos, Espaços de germes.

## 1 Introdução

Seja X:$I\!R^n \to I\!R^n$ um campo vetorial de classe C$^\infty$. Pelo Teorema do Fluxo Tubular temos que, dada uma seção transversal em um ponto regular deste campo, existe um difeomorfismo que o conjuga, numa vizinhaça deste ponto, à um campo constante paralelo à um dos eixos coordenados na origem do $I\!R^n$. Além disso, esse difeomorfismo transforma a seção transversal no hiperplano no qual o campo constante é ortogonal.

Esse teorema é bastante útil pois oportuniza trabalhar com um campo mais simples que o original e que se comporta como ele numa vizinhança de um ponto regular. Mas encontramos problemas quando a seção tomada não é transversal. O que ocorre quando, por exemplo, dado o campo X temos uma subvariedade Q de codimensão 1 em $I\!R^n$ tal que existem pontos sobre Q que são regulares mas suas curvas integrais não são transversais à Q. Isto é, o campo sobre esses pontos está completamente contido no espaço tangente de Q e não são nulos.

Neste contexto, este trabalho está voltado para mostrar resultados importantes que foram dados por Vishik [1]. Assim, como o Teorema do Fluxo Tubular, esses resultados são locais, o que permite estudar campos sobre variedades diferenciáveis de dimensão n sepáraveis , pela sua semelhança local com o $I\!R^n$.

Assim temos formas simples de trabalhar com campos C$^\infty$ sobre uma variedade de dimensão n restritos a uma subvariedade de codimenção 1. Em um desses resultados ele encontra um difeomorfismo de forma a levar localmente o campo à um campo constante e no outro, através de difeomorfismo, transforma a subvariedade no subespaço $I\!R^{n-1}$ restringindo o estudo do campo ao estudo de um campo em $I\!R^n$ restrito a um subespaço próprio. Vishik utiliza para isto, idéias baseadas nas singularidades de Whitney, nos germes de campos vetoriais, jatos de campos

[1]Orientando do mestrado, bolsista CAPES.

[2]Orientador.

vetoriais, transversalidade e na teoria do contato.

Esse trabalho tem como objetivo detalhar e apresentar melhor os resultados citados.

# 2 Resultados e Discussão

Dadas uma variedade M de dimensão n e uma subvariedade Q de codimensão 1 em M, definiremos os germes de campos vetorias, o espaço $\Gamma$(TM,Q) de todos germes de M restritos à Q, os r-jatos de campos vetoriais, o espaço J$^r$(TM,Q) dos r-jatos de M restritos à Q, o conjunto Z(r) dos campos cujos r-jatos possuem singularidade em Q, os conjuntos $\Sigma^{l_k}$(r) dos r-jatos de campos que possuem singularidades de Whitney. A seguir apresentamos lemas que serão úteis no decorrer deste trabalho.

**Lema 2.1.** Z(r) e $\Sigma^{l_k}$(r) são subvariedades de J$^r$(TM,Q) de codimensão n e k respectivamente.

**Lema 2.2.** O conjunto W dos g$\in$ $\Gamma$(TM,Q) tais que seus r-jatos são transversais às subvariedades Z(r) e $\Sigma^{l_k}$(r) é denso em $\Gamma$(TM,Q). Se Q for compacto esse conjunto também será aberto.

**Lema 2.3.** Seja g$\in$ $\Gamma$(TM,Q), então g$\in$W se e somente se para todo z$\in$Q tal que g(z)$\in$ $T_z$(Q) existe um k ($1 \leq k \leq$ m-1), com o (m-1)-jato de g no ponto z pertencente à $\Sigma^{l_k}$(m-1) mas não à $\Sigma^{l_{k+1}}$(m-1), existe também uma vizinhança U, z$\in$U$\subset$M, e coordenadas $(x_1, ..., x_m)$ em U, x$_i$=0 para 1 $\leq i \leq$ m, tais que:

1) g$|_{Q\cap U}$ é um germe do campo $(x'_1 = 1, x'_2 = 0, ..., x'_m = 0)$;

2) Q é dado em U pela equação $x_m$=$\varphi(x_1, ..., x_{m-1})$ onde $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$(0)=0 para 1$\leq$ $j$ $\leq$m-1, $\frac{\partial^i\varphi}{\partial x_1^i}$(0)=0 para 1$\leq$ $i$ $\leq$k, $\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial x_1^{k+1}}$(0)$\neq$0, e a matriz $|a_{ij}|$ ($a_{ij} = \frac{\partial^{i+1}\varphi}{\partial x_1^i \partial x_j}$(0), 1$\leq$ $i \leq k$, 1$\leq$ $j \leq m-1$) tem posto k.

E enuciaremos os dois teoremas de Vishik.

**Teorema 2.1.** Seja A o conjunto dos g$\in$ $\Gamma$(TM,Q) tais que: se z$\in$Q e g(z)$\in$ $T_z$Q, então existem uma vizinhança U(z) com z$\in$U(z)$\subset$M, um inteiro k=k(z) com 1$\leq$k$\leq$m-1, e um sistema de coordenadas (x,$a_2, ..., a_m$) em U(z) ($a_i$(z)=x(z)=0) tais que:

1) g$|_{U(z)\cap Q}$ é um germe sobre Q$\cap$U(z) do campo (x'=1,$a'_2$=0,...,$a'_m$=0);

2) Q é dado em U pela equação $x^{k+1} + a_2x^{k-1} + ... + a_{k+1}$=0. O conjunto A é denso em $\Gamma$(TM,Q). Se Q é compacto, então A é aberto e denso em $\Gamma$(TM,Q); O conjunto A é igual o conjunto W do lema 2.2.

**Teorema 2.2.** Seja B o conjunto dos g$\in$ $\Gamma$(TM,Q) tais que: se z$\in$Q e g(z)$\in$ $T_z$Q então existem uma vizinhança V(z) com z$\in$V(z)$\subset$M, um inteiro k=k(z) com 1$\leq$k$\leq$m-1 e um sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_m)$ em V(z) ($x_i$=0) para os quais:

1) g$|_{Q\subset V(z)}$ é um germe sobre Q$\subset$V(z) do campo $(x_1' = x_2, ..., x_k' = x_{k+1}, x_{k+1}' = 1, 0, ..., 0)$;

2)Q é dado em V(z) pela equação $x_1$=0. O conjunto B é denso em $\Gamma$(TM,Q), B=A do teorema 2.1. Se Q é compacto, então B é aberto e denso em $\Gamma$(TM,Q).

# 3 Conclusões

Neste trabalho vimos definições e resultados que possibilitará posteriormente um entendimento das provas dos teoremas de Vishik. Entender os mesmos nos dá ferramentas muito importantes para enteder os campos genéricos sobre variedades. Isso porque na prova dos teoremas os campos não possuiam singularidades em Q. Seguindo o Programa de Thom-Smale, um próximo passo seria estudar as bifurcações de codimensão um, codimensão dois e assim por diante. Alguns estudos nesse sentido podemos encontrar em [2] e em [4]. Esses trabalhos são uma parcela pequena do que ainda pode ser estudado nesse sentido.

# Referências


[1] Vishik, S.M. - *Vector fields near the boundary of a manifold.* Vestnik Moskovskogo Universiteta. Matematika, Vol. 27, No. 1, pp. 21-28, 1972 UDC 517.4.

[2] da Rocha Medrado, João Carlos; Teixeira, Marco Antonio - *Codimension-two singularities of reversible vector fields in 3D.* Qual. Theory Dyn. Syst. 2 (2001), no. 2, 399–428

[3] Sotomayor, Jorge - *Curvas definidas por equações diferenciais no plano.* Curves defined for differential equations in the plane. 13th Brazilian Mathematics Colloquium - IMPA - CNPq, Rio de Janeiro, 1981. +166 pp.

[4] Sotomayor, J.; Teixeira, M. A. - *Vector fields near the boundary of a 3-manifold.* Dynamical systems, Lecture Notes in Math., 1331, Springer, Berlin, 1988.

[5] Teixeira, Marco Antonio - *Generic bifurcation in manifolds with boundary.* J. Differential Equations 25 (1977), no. 1, 65–89.