Grupos em que cada elemento comuta com sua imagem endomórfica

FERNANDES, Sérgio Reis; **BUENO**, Ticianne Proença Adorno; **SERCONECK**, Shirlei;

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: sergioppo@yahoo.com.br; ticianne@mat.ufg.br; shirlei@mat.ufg.br

Palavras chaves: Automorfismos de Grupos, Endomorfismos de Grupos, Grupos Nilpotente, E-Grupos.

1 Introdução

Seja G um grupo finito, em que cada elemento comutam com sua imagem endomórfica. Vamos dar um contraexemplo à conjectura de que G é abeliano.

Para g e h em G, g e $g^{-1}(h^{-1}gh)$ comutam. Assim G satisfaz a identidade $[x, y, x] = 1$. Portanto G satisfaz as relações $[x, y, z, w] = 1$ e $[x, y, z]^3 = 1$. Logo G é nilpotente de classe ≤ 3 e se G é um p-grupo para um primo $p \neq 3$, G é nilpotente de classe ≤ 2. Vamos exibir para um primo qualquer p um p-grupo nilpotente de classe 2 em que cada elemento comuta com todas as suas imagens endomórficas.

Seja

$$G = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 : a_i^{p^2} = 1, [a_i, a_j, a_k] = 1, (1 \leq i, j, k \leq 4)$$
$$\text{e} \quad (1)\ \ [a_1, a_2] = a_1^p, (2)\ \ [a_1, a_3] = a_3^p, (3)\ \ [a_1, a_4] = a_4^p$$
$$(4)\ \ [a_2, a_3] = a_2^p, (5)\ \ [a_2, a_4] = 1, (6)\ \ [a_3, a_4] = a_1^p\ \rangle.$$

Sejam $End(G)$ e $Aut(G)$ denotam o endomorfismo e automorfismo de G respectivamente. Seja $End_c(G) = \{\theta \in End(G) \mid \theta(G) \leq Z(G)\}$ e $Aut_c(G) = \{\theta \in Aut(G) \mid \theta(g)g^{-1} \in Z(G)$ para todo $g \in G\}$, denotado por automorfismo central de G.

O grupo G é um grupo não abeliano de expoente p^2, objetivo do trabalho é mostrar que cada elemento em grupo G comuta com sua imagem endomórfica, que consiste o Teorema 2.1, cuja demonstração foi dividida em 7 lemas, organizado da seguinte forma.

2 Resultados e Discussão

Teorema 2.1. $End(G) = End_c(G) \cup Aut_c(G)$.

Corolário 2.1. Cada elemento em G comuta com sua imagem endomórfica.

Lema 2.1. Ordem de G é p^8.

Prova: Das relações definidoras temos que $|G| \leq p^8$. Vamos construir um grupo de ordem p^8 que satisfaz as relações definidoras de G.

Sejam $K = \langle k_i, 1 \leq i \leq 4 : k_1^p = k_3^p = 1, k_2^{p^2} = k_4^{p^2} = 1$ e $[k_i, k_j] = 1, 1 \leq i, j, \leq 4\rangle$ e $H = \langle h_1, h_3 : h_1^{p^2} = h_3^{p^2}$ e $[h_1, h_3] = h_3^p\rangle$

K é abeliano pois $[k_i, k_j] = 1$, para $1 \leq i \leq 4$, assim K é um grupo de ordem p^6 e H é um grupo nilpotente de classe 2 de ordem p^4. Sejam σ_1 e σ_3 os automorfismos de K determinados por $\sigma_1(k_1) = k_1$, $\sigma_1(k_3) = k_3$, $\sigma_1(k_2) = k_1^{-1}k_2$ e $\sigma_1(k_4) = k_4^{-p}k_4$ e $\sigma_3(k_1) = k_1$,$\sigma_3(k_3) = k_3$, $\sigma_3(k_2) = k_2^p k_2$ e $\sigma_3(k_4) = k_3^{-1}k_4$. O subgrupo de $Aut(K)$ gerado por σ_1 e σ_2 é um grupo abeliano de expoente p e ordem p^2. Seja θ um homomorfismo de H em $Aut(K)$, definido por $\theta(h_1) = \sigma_1$ e $\theta(h_3) = \sigma_3$.

Seja $S = K \rtimes_\theta H = \{kh, \ h \in H$ e $k \in K\}$ o produto semidireto de K por H determinado por θ. Assim $hk = (\theta(h^{-1}))(k)h$. S é um grupo de ordem p^{10} e os elementos $k_1^{-1}h_1^p$ e $k_3^{-1}h_3^p$ geram um subgrupo R de ordem p^2 em $Z(S)$. Seja $T = S/R$, $t_1 = h_1 \cdot R$, $t_2 = k_2 \cdot R$, $t_3 = h_3 \cdot R$ e $t_4 = k_4 \cdot R$. O grupo T de ordem P^8 é gerado por $t_i : 1 \leq i \leq 4$ e os t_i satisfazem as relações de G. ∎

Lema 2.2. $Z(G) = G' = G^p = U(G)$ onde $U(G)$ é o conjunto de todos os elementos cuja ordem divide p.

Prova: $G' = \langle [a_i, a_j] \mid a_i, a_j \in G\rangle = \langle a_i^p, 1 \leq i \leq 4\rangle = G^p$. Como G é nilpotente de classe 2 assim $\gamma_2(G) \leq Z(G)$ que implica $G' \subseteq Z(G)$ e $G' \subseteq U(G)$. Se $|Z(G)| \geq p^5$, então $[G : Z(G)] \leq p^3$, mas $G/Z(G)$ é gerado por $\{a_1Z(G), a_2Z(G), a_3Z(G), a_4Z(G)\}$. Assim, dois geradores de G são congruentes $mod\ (Z(G))$ e $G/Z(G)$ é gerado por apenas três elementos, e temos que $|G'| \leq p^3$, uma contradição. Logo $Z(G) = G'$. Se $|U(G)| \geq p^5$, então

$[G : U(G)] \leq p^3$, da mesma forma concluímos que $G' = U(G)$. ■

Para um $g \in G$ fixado, seja

$$\begin{aligned} \theta_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longrightarrow [h, g] \end{aligned}$$

Como G é Nilpotente de classe 2, $\theta_g(h_1, h_2) = [h_1 h_2, g] = [h_1, g][[h_1, g], h_2][h_2, g] = [h_1, g][h_2, g] = \theta_g(h_1)\theta_g(h_2)$, assim θ_g é um homomorfismo. $Ker\ \theta_g = \{h \in G \mid [h, g] = 1, \forall g \in G\} = C_G(g) = C_G(\langle g \rangle)$ e pelo teorema do Núcleo e da Imagem $|G| = |Ker\ \theta_g||\theta_g|$ que implica $[G : C_G(\langle g \rangle)] = |\theta_g(G)|$.

Lema 2.3. **(i)** $C_G(\langle a_1 \rangle) = G' \cdot \langle a_1 \rangle$,

(ii) $C_G(\langle a_2 \rangle) = C_G(\langle a_4 \rangle) = G' \cdot \langle a_2, a_4 \rangle$,

(iii) $C_G(\langle a_3 \rangle) = G' \cdot \langle a_3, a_1 a_4 \rangle$.

Prova: Pelo lema 2.2 temos que o lado direito está contido no lado esquerdo.

$$\begin{aligned} \theta_{a_1} : G &\longrightarrow G \\ a_i &\longrightarrow [a_i, a_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_1, a_1] &= 1 \\ [a_2, a_1] &= a_1^p \\ [a_3, a_1] &= a_3^p \\ [a_4, a_1] &= a_4^p \end{aligned}$$

Assim $\theta_{a_1} = \langle a_1^p, a_3^p, a_4^p \rangle$ implica que $|\theta_{a_1}| = p^3$. Então $[G : C_G(\langle a_1 \rangle)] = p^3$, mas $|G' \cdot \langle a_1 \rangle| = p^5$. Portanto $C_G(\langle a_1 \rangle) = G' \cdot \langle a_1 \rangle$, o que nos dá a primeira igualdade. Da mesma maneira, obtemos que $|\theta_{a_i}| = p^2$ e $[G : C_G(a_i)] = p^2$, para $2 \leq i \leq 4$, portanto $C_G(\langle a_2 \rangle) = C_G(\langle a_4 \rangle) = G' \cdot \langle a_2, a_4 \rangle$ e $C_G(\langle a_3 \rangle) = G' \cdot \langle a_3, a_1 a_4 \rangle$.

■

Lema 2.4. Seja n_i $(1 \leq i \leq)$ inteiros. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} n_2 & 0 & n_3 & n_4 \\ -n_1 & n_3 & 0 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_4 - n_1 & 0 \\ 0 & 0 & -n_3 & -n_1 \end{pmatrix}$$

considerada sobre o corpo primo de característica p tem posto 0, 2, ou 3.

Prova: O posto $(A) \neq 4$ uma vez que $detA = 0$. Pode-se verificar se todas as submatrizes de ordem 2 tem determinante $0(mod\ p)$, então $n_i \equiv 0(mod\ p)$, $(1 \leq i \leq 4)$. Logo posto $(A) \neq 2$. ∎

Lema 2.5. Se $\theta \notin Aut(G)$ e $\theta \in End(G)$ então $\theta \in End_c(G)$.

Prova: $\theta \notin Aut(G)$ implica $\theta(h) \in G'$ para algum $h \notin G'$. Assim $h = \prod_{i=1}^{4} a_i^{n_i}$ com $n_i \not\equiv 0\ (mod\ p)$ para pelo menos um i. $[\theta(a_i), h] = [\theta(a_i), \theta(h)] = 1\ (1 \leq i \leq 4)$, logo $\langle [a_i, h], 1 \leq i \leq 4 \rangle \subseteq Ker\ \theta$.

$$(*) \qquad \begin{aligned} [a_1, h] &= a_1^{pn_2} a_3^{pn_3} a_4^{pn_4}, \\ [a_2, h] &= a_1^{-pn_1} a_3^{pn_3}, \\ [a_3, h] &= a_2^{-pn_2} a_3^{p(n_4 - n_1}, \\ [h_4, h] &= a_3^{-pn_3} a_4^{-pn_1}. \end{aligned}$$

A matriz das potências de a_i^p em (*) é a matriz A. O posto (A) é maior ou igual a 2 uma vez que $n_i \not\equiv 0\ (mod\ p)$ para algum i. Logo $|Ker\ \theta \cap G'| \geq p^2$ e existem $\{h_i : 1 \leq i \leq 4\}$ tal que $G = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$ e $\theta(h_1^p) = \theta(h_2^p = 1)$. Assim para $i = 1, 2$, $\theta(h_i) \in G'$ e $(\theta(G))' \subseteq \langle \theta(h_3), \theta(h_4) \rangle'$. Portanto $|\ \theta(G')| = |(\theta(G))'| \leq p$ e $|Ker\ \theta \cap G'| \geq p^3$. Podemos assumir que $\theta(h_i^p) = 1$ e $\theta(h_i) \in G'$, $1 \leq i \leq 3$. Mas agora $(\theta(G))' = \langle 1 \rangle$, Logo $\theta(G)$ é abeliano, $G' \subseteq Ker\ \theta$ e $\theta(G) \subseteq G'$. ∎

Seja

$$\begin{aligned} R &= \{g \in G \mid [G : C_G(\langle g \rangle)] = p^2\} \\ R &= \{g \in G \mid g \notin G' \text{e} g = a_2^r\} \\ R &= \{g \in G \mid g \notin G' \text{e} g = a_1^r a_3^s a_4^r\} \end{aligned}$$

Pelo menos um dos números inteiros r ou s não é divisível por p uma vez que $g \notin G'$.

Lema 2.6. $R = R_1 \cup R_2$.

Prova: Seja $h = \prod_{i=1}^{4} a_i^{n_i}$. E $h \in R$ se, e somente se, $|\theta_h(G)| = p^2$. O argumento no Lema 2.5 nos dá que $|\theta_h(G)| = p^2$ se, e somente se, posto $(A) = 2$. Por inspeção podemos observar que posto $(A) = 2$ se $h \in R_1 \cup R_2$. ∎

Lema 2.7. $Aut(G) = Aut_c(G)$.

3 Conclusões

Provamos que o

1. $G^p = U(G) = G' = Z(G)$, onde $U(G) = \{g \in G | \ o(g) | \ p\}$
2. cada endomorfismo estrito (i.é. um endomorfismo que não é um automorfismo) de G tem sua imagem em $Z(G)$, e
3. cada automorfismo é central.

que mostra que G é um E-grupo, i. e., cada elemento em G comuta com sua imagem endomórfica. Este resultado serve como base para estudarmos o artigo [3] Malone que mostra, para $p = 2$, o exemplo de Fruadree é falso.

Referências

[1] Abdollahi, A., Faghihi, A., Linton, S.A., and O'Brien, E.A. - *Finite 3-Groups of Class 3 Whose Elements Commute with their Automorphic Images*, Arch. Math, 95, 1-7 (2010).

[2] Faudree, R. - *Groups in which each element commutes with its endomorphic images*, Proc. Amer. Math. Soc., 27, 236-240 (1968).

[3] Malone, J.J. - *More on groups in which each element commutes with its endomorphic images*, Proc. Amer. Math. Soc., 65, 209-214 (1977).

[4] Robinson, D.J.S. - *A course in the theory of groups*, Second Edition, Springer, New York, 1995.