Discórdia Quântica

Thiago Mureebe CARRIJO[1]; Ardiley Torres AVELAR[2].

Instituto de Física
thiagomureebe@gmail.com[1]; ardiley@gmail.com[2]

Palavras-chave: entropia; discórdia quântica; teoria da informação.

1 Introdução

A Teoria de Informação Clássica, originalmente destinada à solução de problemas de engenharia ligados à telecomunicação via rádio e telégrafo [1, 2], obteve sua base formal matemática com o trabalho de Shannon [3], o qual definiu uma medida para a quantidade de informação de uma fonte de variáveis aleatórias, conhecida como entropia de Shannon, a qual tem uma aplicação direta em teoria de códigos. Essa medida tem a mesma forma funcional da entropia de Gibbs. Portanto, a generalização da entropia termodinâmica clássica para sistemas quânticos obtida por von Neumann [4] é também a generalização da entropia de Shannon. A entropia de von Neumann é a base da Teoria de Informação Quântica e tem aplicações em áreas como a compressão de dados [5–7] e a criptografia quântica [8, 9].

Observou-se que alguns tipos de estados quânticos, conhecidos como estados emaranhados [10], que descrevem sistemas com correlações, entre seus subsistemas, mais fortes do seria possível classicamente [11], têm aplicações interessantes em teoria de informação e computação quântica, como a correção quântica de erro [12–14], o teleporte quântico [15] e a codificação densa [16]. Ocorre que também há estados não emaranhados que possuem aplicações de eficiência superior à computação clássica [17]. O que os caracteriza são as correlações puramente quânticas, as quais são corretamente medidas pela quantidade conhecida como discórdia quântica, definida por Zurek [18]. Outro trabalho, de Henderson e Vedral [19], propôs uma medida das correlações puramente clássicas. As correlações totais são a soma dessas duas.

O cálculo da discórdia não é simples, por isso foi efetuado analiticamente para sistemas particulares, como o de dois qubits [20]. Para um sistema de dois qubits no estado X [21], foi mostrado que não há morte súbita da discórdia [22], ao contrário do que ocorre com o emaranhamento, para alguns tipos de ruídos quânticos, como o canal de depolarização, o banho térmico à temperatura arbitrária e o canal de atenuação de fase. Shabani e colaboradores [23] mostraram que o estado de um sistema mais o ambiente deve ter discórdia nula para que a evolução do sistema seja um mapa completamente positivo, o que é um resultado de interesse em computação quântica. Ou seja, eles encontraram a classe de estados cuja qualquer evolução quântica é um mapa completamente positivo. Com respeito à "quantidade"de estados com discórdia não-nula ou, mais precisamente, à cardinalidade do conjunto de estados com essa discórdia, ela é maior do que a cardinalidade do conjunto de estados que a anulam [24]. Ou seja, estados com discórdia nula são muito raros. Além disso, nesse mesmo artigo, Ferraro e colaboradores mostraram que quaisquer estados com discórdia estritamente positiva não apresentam morte súbita para uma dinâmica markoviana. E, recentemente, obteve-se a classe de estados que não possuem correlações quânticas [25].

2 Material e Métodos

O trabalho é de natureza teórica, não tendo sido utilizado laboratório. Para seu desenvonlvimento, recorreu-se à literatura na forma de livros e artigos específicos da área. Também fez-se o uso de programas de computação álgebrica para o efetuo de cálculos e gráficos. As teorias que dão o fundamento científico aos resultados obtidos, em geral na forma de teoremas, são basicamente a Teoria da Informação e a Mecânica Quântica.

3 Resultados e Discussão

A entropia de Shannon $H(X) = -\sum_k p(x_k) \log_2 p(x_k)$ é uma função que mede a quantidade de informação associada a uma variável aleatória $X = \{x_k | k \in I \subset \mathbb{N}\}$ que é domínio uma distribuição de probabilidade $p : X \to [0, 1]$. Essa quantidade de informação também é entendida como o quão imprevisível é o resultado de um evento descrito por X e p. A entropia de Shannon também é conhecida como a entropia clássica, pois existe uma generalização para o caso de eventos descritos pela mecânica quântica, conhecida como entropia de von Neumann $S(\rho) = -\operatorname{tr}(\rho \log_2 \rho)$. A relação entre as duas entropias pode ser verificada no seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Seja $\{P_k\}$ um conjunto completo de medidas projetivas unidimensionais ortogonais e $p_k = \operatorname{tr}(P_k \rho)$ a probabilidade de se medir P_k em um sistema no estado ρ, tem-se:*

$$S(\rho) = \min_{\{P_k\}} H(p_k), \tag{1}$$

em que o mínimo é tomado em todos os possíveis conjuntos $\{P_k\}$.

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Se elas estão correlacionadas de alguma forma, então o conhecimento de uma deverá fornecer informações sobre a outra. A quantidade que mede isso é a entropia condicional, dada por $H(X|Y) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i|y_j) = H(X,Y) - H(Y)$. Quanticamente, entretanto, a entropia condicional pode ter duas formas distintas. Em uma delas, fazendo analogia com a definição clássica, tem-se $S(A|B) = S(AB) - S(B)$, sendo A e B dois sistemas. Porém, em sistemas quânticos, o conhecimento do estado pode implicar numa alteração do mesmo, a qual depende da medida efetuada. Suponha que $\{B_k\}$ seja um conjunto completo de medidas em B. Ocorre que deve existir um conjunto específico que extrai a maior quantidade possível de informações de A. Assim, a entropia condicional dada pela medida é $S_m(A|B) = \min_{\{B_k\}}\{\sum_k p_k S(\rho_A^{(k)})\}$.

Uma questão que se deseja saber é se duas variáveis aleatórias são dependentes entre si ou não. Para isso, criou-se o conceito de informação mútua $H(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$. X e Y são independentes se, e somente se, $H(X:Y) = 0$, pois a informação mútua mede o grau dependência entre as variáveis. Ocorre que essa definição em teoria de informação quântica pode ser feitas de duas formas, dependendo da escolha do tipo de entropia condicional quântica:

$$T(A:B) = S(A) + S(B) - S(A,B) = S(A) - S(A|B), \quad C(A|B) = S(A) - S_m(A|B). \tag{2}$$

$T(A:B)$ mede a informação mútua, mas sem usar qualquer tipo de medida, e $C(A|B)$ mede a mesma grandeza, mas usando medidas em B. Também, analogamente, pode-se definir $C(B|A)$. Como a informação mútua clássica não é alterada por medidas, entende-se que sistemas com comportamento clássico satisfazem $T(A:B) = C(A|B)$ ou $T(A:B) = C(B|A)$. Assim, a medida deve destruir a correlação de caráter quântico dos sistemas, o que sugere que T fornece as correlações totais do sistema, enquanto C fornece apenas as clássicas. As correlações quânticas, portanto, devem ser dadas por:

$$Q(A|B) = T(A:B) - C(A|B). \tag{3}$$

em que Q é conhecida como discórdia quântica. É possível mostrar que $Q(A|B) = 0 \equiv \rho = \rho'$, em que ρ' é o estado após a medida local em B, ou seja, estados com correlações quânticas são necessariamente perturbados por medidas locais.

Se o estado possui discórdia nula, qual é a sua expressão?

Teorema 3.2. *Seja ρ a matriz densidade do sistema AB, $Q(A|B) = 0 \Leftrightarrow \rho = \sum_k p_k \rho^{(k)} \otimes B_k$, em que $B_k = |b_k\rangle\langle b_k|$ e $\{|b_k\rangle\}$ é um conjunto de vetores ortogonais.*

O que tem de interessante nesse teorema? Para ver isso, é preciso enunciar a definição de um estado emaranhado. Seja $\rho = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$ o estado de um sistema AB, em que p_k são probabilidades, ρ é dito ser um estado separável. Um estado emaranhado é definido como sendo não separável. Sejam ρ_S e ρ_C estados separáveis e com discórdia nula, respectivamente. Nota-se que todo ρ_C é um estado separável, ou seja, existem correlações quânticas em estados não emaranhados.

4 Conclusões

A partir da discódia quântica, algumas idéias estão sendo trabalhadas. Como a discórdia está relacionada com a perturbação do estado decorrente de medida, supõe-se que a quantidade $\Delta(A|B) = 1 - \max_{\{B_k\}} F(\rho, \rho_{\{B_k\}})$ avalie se o estado possui ou não discórdia quântica, em que $\rho_{\{B_k\}}$ é o estado após a medida em B e $F(\rho_1, \rho_2) = \mathrm{tr}\sqrt{\sqrt{\rho_2}\rho_1\sqrt{\rho_2}}$ é a função fidelidade, que mede o quanto os estados 1 e 2 estão próximos entre si. A proposta é usar Δ para medir correlações quânticas entre sistemas descritos por variáveis contínuas.

Outra proposta seria definir uma grandeza que avalie o máximo de correlação quântica que um sistema submetido a uma operação quântica ε pode perder. Para isso, está sendo analisada a função $Q(\rho, \varepsilon) \equiv \max_{\{\rho', \varepsilon'\}} \{Q(\varepsilon \otimes \varepsilon' \rho') - Q(\rho')\}$, em que ε' é uma operação quântica em ρ', sendo $\rho = \mathrm{tr}_A(\rho')$. Com essa medida, seria possível demonstrar um teorema de codificação em canais sem ruído, postulando que um canal quântico deve preservar não o emaranhamento, mas a correlação quântica.

Referências

[1] H. Nyquist, Bell System Technical Journal, 324 (1924).

[2] R. V. L. Hartley, Bell System Technical Journal, 535 (1928).

[3] C. E. Shannon, Bell System Technical Journal, **27**, 379 (19480.)

[4] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanic* (Springer, Berlin 1932).

[5] B. Schumacher, Phys. Rev. A, **51**, 2738 (1995)

[6] B. Schumacher e M. B. Westmoreland, Phys. Rev. A, **56(1)**, 131 (1997)

[7] A. S. Holevo, IEEE. Trans. Inf. Theory, **44(1)**, 269 (1998)

[8] S. Wiesner, SIGACT News, **15**, 77 (1983)

[9] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel e H. Zbinden, Rev. Mod. Phys., **74**, 145 (2002)

[10] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Rev. Mod. Phys., **81**, Abril-Junho (2009).

[11] J. S. Bell, Physics Long Island City, **1**, 195 (1964).

[12] P. W. Shor, Phys. Rev. A, **52**, 2493 (1995).

[13] A. M. Steane, Phys. Rev. Lett., **77**, 793 (1996).

[14] D. Gottesman, *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction*, arXiv:quant-ph/9705052 (1997).

[15] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett., **70**, 1895 (1993).

[16] C. H. Bennett e S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).

[17] A. Datta, A. Shaji e C. M. Caves, Phys. Rev. Lett. **100**, 050502 (2008).

[18] H. Ollivier e W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001)

[19] L. Henderson e V. Vedral, J. Phys. A: Math. Gen., **34**, 6899 (2001).

[20] S. Luo, Phys. Rev. A, **77**, 042303 (2008).

[21] B. Li, Z. X. Wang e S. M. Fei, Phys. Rev. A, **83**, 022321 (2001).

[22] T. Werlang, S. Souza, F. F. Fanchini e C. J. V. Boas, Phys. Rev. A, **80**, 024103 (2009).

[23] A. Shabani e D. A. Lidar, Phys. Rev. Lett., **102**, 100402 (2009).

[24] A. Ferraro, L. Aolita, D. Cavalcanti, F. M. Cucchietti, A. Acin, Physical Review A, **81**, 052318 (2010).

[25] B. Dakic, V. Vedral, C. Brukner, Phys. Rev. Lett., **105**, 190502 (2010).