

O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

López Solís, Víctor Hugo; Serconek, Shirlei

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa

Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: victorhugomath@hotmail.com; serconek@math.rutgers.edu

Palavras chaves: Álgebras associativas, Álgebras associativas livres, Álgebras de Lie, Álgebras de Semigrupo, Álgebra Envelopante Universal, Bases.

1 Introdução

Mostraremos que para cada álgebra de Lie g , existe uma álgebra associativa com identidade chamada sua álgebra envelopante universal, que denotaremos por $U(g)$, tendo a propriedade que qualquer homomorfismo de álgebras de g em uma álgebra associativa A com identidade estende-se a um homomorfismo de álgebras associativas de $U(g)$ em A levando 1 em 1. Assim, existe uma questão natural sobre a relação existente entre as bases de g e de sua álgebra envelopante universal $U(g)$. Esta relação manifesta-se no Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt que fornece uma base de espaço vetorial para $U(g)$ em termos de uma base ordenada de g . Este teorema tem muitas demonstrações tanto clássicas como modernas, ver [1] e [4]. Por exemplo em 1978, George M. Bergman [2], utilizou ferramentas da Teoria de Grafos (lema do diamante) para dar uma prova alternativa do teorema. Essa demonstração é vista como uma demonstração moderna. A importância da álgebra envelopante universal de uma álgebra de Lie, reside no fato de que ela é uma ferramenta básica para o estudo de representações e mais geralmente para o estudo de homomorfismos de uma álgebra de Lie g em uma álgebra de Lie U_L onde U é associativa com elemento identidade.

2 Resultados e Discussão

Apresentamos a seguir, a definição de álgebra envelopante universal associada a uma álgebra de Lie e discutimos algumas de suas propriedades.

Definição 2.1. Uma álgebra envelopante universal da álgebra de Lie g é uma álgebra associativa $U(g)$ que contém g e tal que toda representação ρ de g estende-se a uma representação de $U(g)$ (subentende-se, ao longo deste capítulo, que as álgebras associativas são com unidade). De maneira mais formal, uma álgebra associativa U é uma álgebra envelopante universal de g se existe um homomorfismo injetor

$$j : g \longrightarrow U$$

que satisfaz

1. a imagem $j(g)$ gera U como álgebra associativa e
2. se $\rho : g \longrightarrow gl(V)$ é uma representação de g em V , então existe uma representação $\tilde{\rho} : U \longrightarrow gl(V)$ que satisfaz

$$\tilde{\rho} \circ j(X) = \rho(X),$$

para todo $X \in g$. Aqui, $\tilde{\rho}$ é uma representação de uma álgebra associativa, isto é, satisfaz

$$\tilde{\rho}(XY) = \tilde{\rho}(X)\tilde{\rho}(Y),$$

onde o produto do primeiro membro é o produto da álgebra e o do segundo membro é a composição usual de transformações lineares em V . Em outras palavras, U é uma álgebra envelopante universal de g se para toda representação ρ de g existe uma representação $\tilde{\rho}$ de U tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ j \nearrow & & \searrow \tilde{\rho} \\ g & \xrightarrow{\rho} & gl(V) \end{array}$$

comuta.

A construção canônica da álgebra envelopante universal é feita a partir de g seguindo a idéia básica de que $U(g)$ é uma álgebra associativa gerada por g (já que $j : g \longrightarrow U(g)$ é injetora) e, portanto, os elementos de $U(g)$ devem ser justaposições associativas de elementos de g . Dessa forma, considera-se a álgebra associativa livre gerada por g . Essa é a álgebra tensorial

$$\tau(g) = \sum_k \bigotimes_k g$$

de g . Seus elementos são combinações lineares finitas de monômios da forma

$$X_1 \cdots X_k$$

com o produto indicado o produto tensorial dos elementos $X_i \in g, i = 1, \dots, k$, (o símbolo $\otimes$ de produto tensorial é omitido tanto por razões de economia de notação quanto para enfatizar que o produto é obtido por justaposição - formal - dos elementos de g).

A álgebra $\tau(g)$ é uma álgebra associativa que contém e é gerada por g . No entanto, a inclusão $g \hookrightarrow \tau(g)$ não é um homomorfismo de g na álgebra de Lie definida em $\tau(g)$ pelo comutador. Isso porque, para $X, Y \in g$, $XY - YX$ é diferente de $[XY]$, pois o primeiro é um elemento de grau dois de $\tau(g)$, enquanto que o segundo é um elemento de g , isto é, de grau um. O homomorfismo se consegue tomando uma álgebra quociente de $\tau(g)$. Assim, a álgebra envelopante universal pode ser construída como

$$U(g) = \tau(g)/J$$

onde J é o ideal bilateral de $\tau(g)$ gerado por elementos (não-homogêneos) da forma

$$XY - YX - [XY] \in \tau(g)$$

com $X, Y \in g$. Os elementos dessa álgebra quociente são representados, da mesma forma, por combinações lineares de monômios do tipo $X_1 \cdots X_k$ (representantes em $\tau(g)$) com a diferença que em $U(g)$ existem igualdades entre elementos não-homogêneos. Por exemplo,

$$X_1 \cdots XY \cdots X_k = X_1 \cdots YX \cdots X_k + X_1 \cdots [XY] \cdots X_k$$

em $U(g)$, mas não em $\tau(g)$. Os produtos em $U(g)$ são, da mesma forma, dados por justaposição de monômios. Passando ao quociente, a inclusão de g em $\tau(g)$, induz uma inclusão de g em $U(g)$ que é, por construção um homomorfismo quando se considera em $U(g)$ o colchete dado pelo comutador. Essa aplicação de g em $U(g)$ é injetora, pois o ideal J tem interseção nula com g , já que os elementos de J são gerados por elementos de grau maior o igual a dois da álgebra tensorial. Por fim, uma representação ρ de g no espaço vetorial V se estende a uma representação $\tilde{\rho}$ de $U(g)$ que é definida nos monômios por

$$\tilde{\rho}(X_1 \cdots X_k) = \rho(X_1) \cdots \rho(X_k). \quad (1)$$

O procedimento para ver que $\tilde{\rho}$ é de fato uma representação é o seguinte: em primeiro lugar, estende-se ρ à álgebra tensorial $\tau(g)$. Isso é possível, pois $\tau(g)$ é a álgebra associativa

livre gerada por g e, portanto, qualquer aplicação de g a valores numa álgebra associativa se estende a um homomorfismo de $\tau(g)$. Feito isso, o fato de que ρ é uma representação de álgebra de Lie garante que o ideal J definido acima está contido no núcleo da representação de $U(g)$, que nos monômios é dada por $\tilde{\rho}$ como acima. Então todas as combinações lineares finitas de monômios nos elementos de g em que se identifica $XY - YX$ com $[XY]$ é uma realização da álgebra envelopante universal de g .

Um resultado central sobre as álgebras envelopantes universais é o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Esse teorema, de natureza puramente combinatória, fornece bases de $U(g)$ ordenando os monômios de acordo com ordens em bases de g . Explicitamente, tem-se

Teorema 2.1. (Poincaré-Birkhoff-Witt) Seja g uma álgebra de Lie (de dimensão finita ou não) e $\{X_i\}_{i \in J}$ uma base de g ordenada por uma ordem total em J . Então, os monômios do tipo

$$X_{i_1} \cdots X_{i_k} \quad i_1 \leq \cdots \leq i_k \quad (2)$$

formam uma base de $U(g)$. Em particular, se $\dim(g) < \infty$ e

$$\beta = \{X_1 \cdots X_n\}$$

é uma base ordenada de g , então os monômios

$$X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}$$

com $m_i \geq 0$ formam uma base de $U(g)$.

3 Conclusões

Portanto, mostramos que para cada álgebra de Lie g , existe uma única álgebra associativa com identidade chamada sua álgebra envelopante universal $U(g)$, cuja base tem relação com a base de g . Esta relação manifesta-se no Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt que fornece uma base de espaço vetorial para $U(g)$ em termos de uma base ordenada de g .

Referências

- [1] Anthony W. Knap. - *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [2] George M. Bergman. - *The Diamond Lemma for Ring Theory*, Advances in mathematics 29, 178-218 (1978).
- [3] Luis A. B. San Martín. - *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, Campinas, 1999.
- [4] Nathan Jacobson. - *Lie algebras*, Dover Publications, Inc. New York, 1962.
- [5] Thomas W. Hungerford. - *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1974.