

Estudo de Campos Vetoriais Descontínuos dados na forma de Jordan com autovalores complexos

Lucyjane de Almeida Silva ¹, João Carlos da Rocha Medrado ^{2 2}

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

lucyjanealmeida@gmail.com, joaocarlosmedrado@gmail.com

RESUMO

Considere o plano como a união dos semi-planos Σ^+ e Σ^- com a curva Σ e seja $Z(X, Y)$ tal que X está definido em Σ^+ união com Σ e Y em Σ^- união com Σ . Dizemos que Z é um campo vetorial descontínuo em Σ . O objetivo deste trabalho estudar os campos $Z(X, Y)$ e o comportamento de suas órbitas em Σ .

Para o estudo dos campos vetoriais descontínuos aplicamos o método de reescalamto do tempo nos campos X, Y e determinamos formas mais simples que são equivalentes do campo original.

Neste trabalho estudamos o caso em que X, Y são campos vetoriais cujas matrizes do sistema de equações diferenciais ordinárias associado ao campo são dadas na forma de Jordan com autovalores complexos.

Palavras chaves: Campos Vetoriais Descontínuos, reescalamto, forma normal

1 Introdução

Um campo vetorial X definido em \mathbb{R}^2 é uma aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. A este campo podemos associar a seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = X(x). \quad (1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$. As soluções da equação diferencial (1) são chamadas de órbitas ou de trajetórias ou de curvas integrais do campo vetorial X .

O objetivo da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias iniciada por Poincaré é o estudo qualitativo do campo vetorial X . Esta teoria é importante pelo fato de obtermos resultados precisos na análise da equação diferencial sem precisarmos resolvê-la explicitamente.

Consideramos Σ uma subvariedade de codimensão um dado por $f^{-1}(0)$ onde f é uma função do plano na reta e 0 é um valor regular. Consideramos ainda que $\Sigma^- = f^{-1}(x)$ se $x < 0$ e $\Sigma^+ = f^{-1}(x)$

¹orientanda IC-Balcão. Processo CNPq 507.052/2010 – 2

²orientador.

²trabalho revisado pelo orientador.

se $x > 0$. Denotamos o campo vetorial descontínuo Z , definido em \mathbb{R}^2 , por $Z(X, Y)$ onde X e Y são campos vetoriais,

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^-. \end{cases}$$

A teoria dos sistemas dinâmicos descontínuos está em amplo desenvolvimento devido a sua aplicação em diferentes áreas, tais como engenharia elétrica, engenharia mecânica, biologia e física. Além da sua aplicação, a busca pela compreensão matemática de tais sistemas é incentivo para sua análise e usaremos isto como motivação para este trabalho.

O objetivo deste trabalho é analisar campos vetoriais descontínuos $Z(X, Y)$, onde X e Y são campos vetoriais lineares em \mathbb{R}^2 dados na forma de Jordan com autovalores complexos e singularidade na origem. Denotamos o conjunto de tais campos vetoriais por $X^r(\mathbb{R}^2)$. Utilizamos o reescalamamento do tempo nos campos X e Y para reduzir a análise de $Z(X, Y)$ ao estudo de formas mais simples que denominamos Formas Normais. Estas técnicas são usuais e utilizadas em vários trabalhos, como por exemplo, em [4].

Classificamos os campos vetoriais descontínuos e damos as formas normais que são apresentadas no próximo teorema.

Teorema A. Dado $Z(X, Y)$ com $X, Y \in X^r(\mathbb{R}^2)$ então, ele é topologicamente equivalente a uma das seguintes formas normais

$$(i) \ Z_1(X, Y) = ((\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2), (\lambda^- y_1 - y_2, y_1 + \lambda^- y_2)),$$

$$(ii) \ Z_2(X, Y) = ((\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2), (\lambda^- y_1 + y_2, -y_1 + \lambda^- y_2))$$

e os retratos de fases são dados na figura 1.

2 Preliminares

Nesta seção abordaremos algumas definições preliminares e provamos um resultado que caracteriza as órbitas de um dado campo vetorial descontínuo em relação ao conjunto de descontinuidade.

Definição 1. Dizemos que $Z(X, Y)$ é topologicamente equivalente a $Z_i(X, Y)$ se existe um homeomorfismo preservando Σ que leva as trajetórias de Z em trajetórias de Z_i preservando a orientação.

Definição 2. Sejam $X, Y \in X^r(\mathbb{R}^2)$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tendo zero como valor regular e $\Sigma = f^{-1}(0)$. Definimos $\Sigma^+ = \{z \in \mathbb{R}^2 | f(z) \geq f(0)\}$ e $\Sigma^- = \{z \in \mathbb{R}^2 | f(z) \leq f(0)\}$.

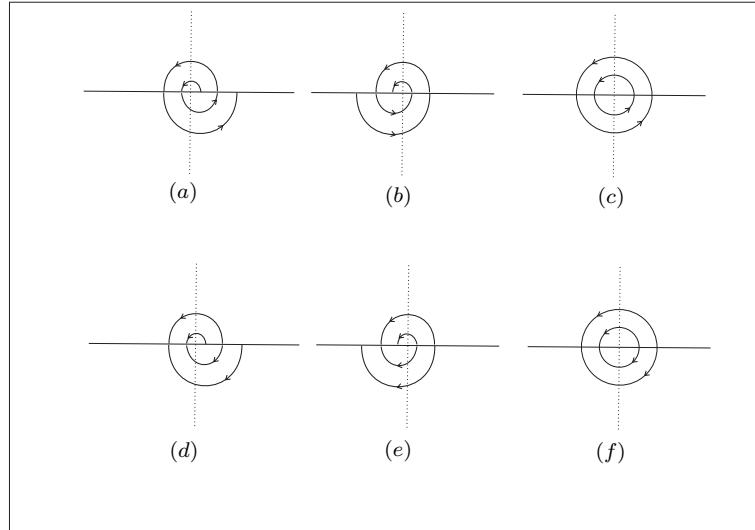


Figura 1: retratos de fases de campos vetoriais descontínuos

Neste trabalho consideramos $f(x, y) = y$ e dado $X \in X^r(\mathbb{R}^2)$ definimos $Xf = \langle X, \nabla f \rangle$. Observamos que $Xf(p) = 0$ então a órbita de X é tangente a Σ em $p \in \Sigma$, caso $Xf(p) \neq 0$ a órbita de X é transversal a Σ em p . Ver figuras 2 -(a) e 2 -(b) respectivamente.

Com isto, o campo vetorial descontínuo $Z = Z(X, Y)$ é dado por

$$Z(z) = \begin{cases} X(z), & \text{se } z \in \Sigma^+, \\ Y(z), & \text{se } z \in \Sigma^-. \end{cases}$$

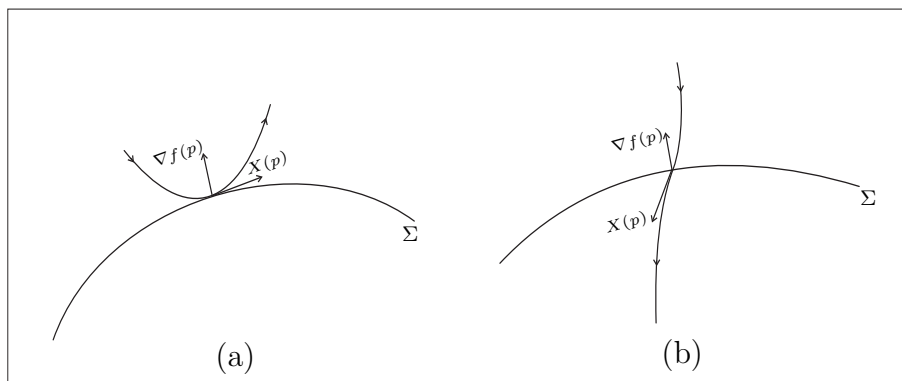


Figura 2: (a)– órbita tangente a Σ , (b)– órbita transversal a Σ .

Definição 3. Dado $Z(X, Y)$, seguindo a terminologia estabelecida por Filippov distinguimos as seguintes regiões em Σ ;

- **Região de Costura:** quando $(Xf)(Yf) > 0$,

- *Região de Escape:* quando $Xf > 0$ e $Yf < 0$,
- *Região de Deslize:* quando $Xf < 0$ e $Yf > 0$.

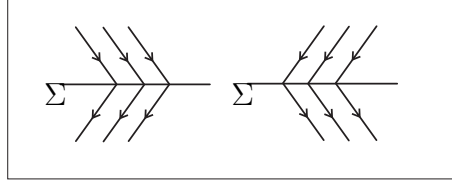


Figura 3: Regiões de Costura.

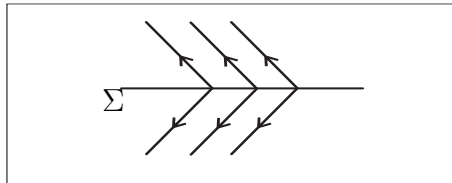


Figura 4: Região de Escape.

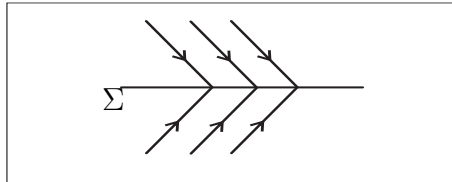


Figura 5: Região de Deslize.

Lema 1. Dado $Z = Z(X, Y)$ então as órbitas de Z não tangenciam Σ .

Prova: Considerando o sistema de equações diferenciais ordinárias associado ao campo $X = X(x, y) \in X^r(\mathbb{R}^2)$ dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by, \\ \dot{y} = bx + ay, \end{cases} \quad (2)$$

onde $b \neq 0$. Devemos mostrar que $Xf(p) \neq 0, \forall p \in \Sigma \setminus \{0\}$. Como $f(x, y) = y$ temos que $\nabla f = (0, 1)$. Para $p \in \Sigma \setminus \{0\}$ segue que $p = (x, 0)$ e assim

$$\langle X(p), \nabla f(p) \rangle = \langle (ax, bx), (0, 1) \rangle = bx$$

Como $b \neq 0$ e $x \neq 0$ temos que $Xf(p) \neq 0$. Portanto as órbitas de Z não tangenciam Σ . ■

3 Formas Normais

Nesta seção, determinamos as formas normais de todos os campos vetoriais descontínuos dados por

$$Z(X, Y) = ((a_1x_1 - b_1x_2, b_1x_1 + a_1x_2), (a_2y_1 - b_2y_2, b_2y_1 + a_2y_2))$$

e apresentamos os retratos de fases.

Lema 2. *As formas normais de $X(x, y) = (ax - by, bx + ay)$, são dadas por*

1. $X_1(x, y) = (\lambda x - y, x + \lambda y)$,
2. $X_2(x, y) = (\lambda x + y, -x + \lambda y)$.

Prova: Reescalando o tempo com $t = \gamma\tau$ e considerando o sistema de equações diferenciais ordinária dado pelo sistema 2 temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma ax - \gamma by \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma bx + \gamma ay \end{aligned}$$

Se $\gamma = 1/b$ temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{a}{b}x - y = \lambda x - y \\ \frac{dy}{d\tau} &= x + \frac{a}{b}y = x + \lambda y \end{aligned}$$

onde $\lambda = a/b$. Logo, o campo X é equivalente a forma normal 1.

Se $\gamma = -1/b$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\frac{a}{b}x + y = \lambda x + y \\ \frac{dy}{d\tau} &= -x - \frac{a}{b}y = -x + \lambda y \end{aligned}$$

onde $\lambda = -a/b$. Logo, o campo X é equivalente a forma normal 2. ■

Observação 1. Quando $\gamma > 0$ estamos preservando o sentido das órbitas do campo vetorial, quando $\gamma < 0$ invertemos o sentido das órbitas.

Considerando $Z(X, Y)$, ao fazermos reescalamo do tempo nos campos X e Y , dado por $t = \gamma^+ \tau$ e $t = \gamma^- \tau$, respectivamente, exigiremos $\gamma^+ \gamma^- > 0$ e adotamos λ^+ , λ^- associados aos respectivos campos.

Lema 3. Seja $Z(X, Y)$ com $b_1 b_2 > 0$. Ele é topologicamente equivalente à forma normal

$$Z_1(X, Y) = ((\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2), (\lambda^- y_1 - y_2, y_1 + \lambda^- y_2))$$

e o retrato de fase dado na Figura 6 .

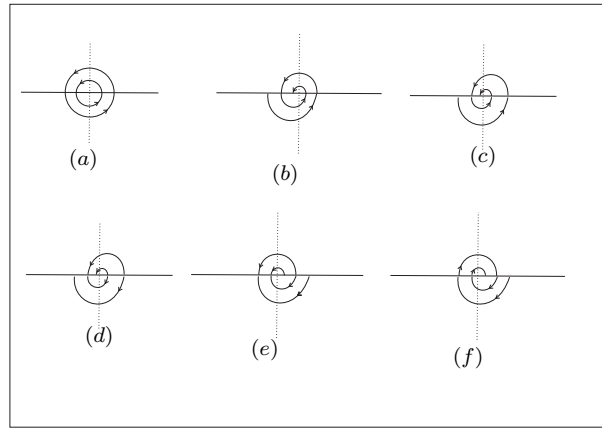


Figura 6: retrato de fase da forma normal Z_1 .

Prova: Como $b_1 b_2 > 0$ podemos reescalar o tempo no campo vetorial X com $t = \gamma^+ \tau$ onde $\gamma^+ = 1/b_1$, então pelo Lema 2 obtemos

$$X_1(x_1, x_2) = (\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2),$$

onde $\lambda^+ = a_1/b_1$. No campo Y podemos reescalar o tempo fazendo $t = \gamma^- \tau$, onde $\gamma^- = 1/b_2$, de acordo com o Lema 2 obtemos a seguinte forma normal

$$Y_1(y_1, y_2) = (\lambda^- y_1 - y_2, y_1 + \lambda^- y_2),$$

onde $\lambda^- = a_2/b_2$.

Portanto, $Z(X, Y)$ é topologicamente equivalente a $Z_1(X, Y)$.

Observe que em $Z_1(X, Y)$ temos $b_1 = b_2 = 1$, assim a solução geral do sistema de equações diferenciais ordinárias associado a X e Y quando se tem uma condição inicial $X_0 = (x_0, 0)$ é dada por $\varphi_1(t, X_0) = x_0 e^{\lambda^+ t} (\cos t, \sin t)$ e $\varphi_2(t, X_0) = x_0 e^{\lambda^- t} (\cos t, \sin t)$, respectivamente.

As soluções interceptam Σ em pontos no qual a segunda coordenada é igual a 0, ou seja, $\text{sent } t = 0$, mas isso ocorre se e somente se $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como $\varphi_1(0, X_0) = (x_0, 0)$ para determinarmos o próximo ponto devemos ter $t = \pi$, assim obtemos $X_1 = \varphi_1(\pi, X_0) = (-x_0 e^{\lambda^+ \pi}, 0)$, de maneira análoga obtemos $X_2 = \varphi_2(\pi, X_1) = (x_0 e^{(\lambda^+ + \lambda^-)\pi}, 0)$. Analizando $\varphi_2(\pi, X_1)$ segue que,

- se $\lambda^+ + \lambda^- > 0$ temos $|X_2| > |X_0|$, assim o retrato de fases de $Z_1(X, Y)$ é equivalente a:
 - (i) Figura 6 -(f), se $\lambda^+ > 0$ e $\lambda^- > 0$,
 - (ii) Figura 6 -(e), se $\lambda^+ < 0$ e $\lambda^- > 0$ onde $|\lambda^+| < |\lambda^-|$.
- se $\lambda^+ + \lambda^- < 0$ temos $|X_2| < |X_0|$, logo o retrato de fases de Z_1 é equivalente a:
 - (i) Figura 6 -(b), se $\lambda^+ = 0$ e $\lambda^- < 0$,
 - (ii) Figura 6 -(c), se $\lambda^+ < 0$ e $\lambda^- < 0$,
 - (iii) Figura 6 -(d), se $\lambda^+ < 0$ e $\lambda^- > 0$ onde $|\lambda^+| > |\lambda^-|$.
- se $\lambda^+ + \lambda^- = 0$ temos $|X_2| = |X_1|$, assim o retrato de fases de $Z_1(X, Y)$ é equivalente à Figura 6 -(a). ■

Lema 4. Dado $Z(X, Y)$ com $b_1 b_2 < 0$. Ele é topologicamente equivalente à forma normal

$$Z_2(X, Y) = ((\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2), (\lambda^- y_1 + y_2, -y_1 + \lambda^- y_2))$$

e o retrato de fase dado na figura 7

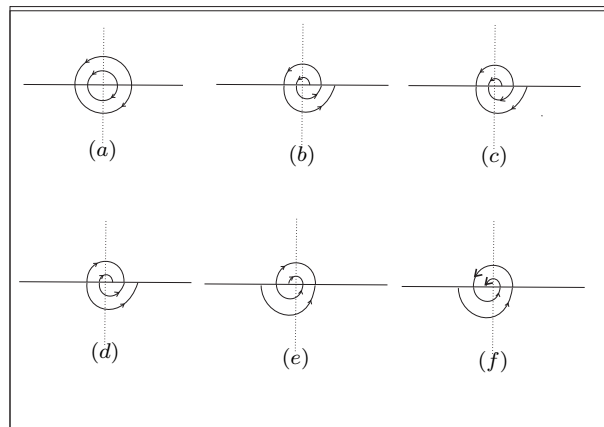


Figura 7: retrato de fase da forma normal Z_2 .

Prova: Podemos fazer um reescalamiento do tempo no campo X dado por $t = \gamma^+ \tau$ onde $\gamma^+ = 1/b_1$, de acordo com o Lema 2 obtemos,

$$X_1(x_1, x_2) = (\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2)$$

onde $\lambda^+ = a_1/b_1$.

Como $b_1 b_2 < 0$, seja $\gamma^- = -1/b_2$, reescalando o tempo no campo Y com $t = \gamma^- \tau$, pelo Lema 2 obtemos;

$$Y_1(y_1, y_2) = (\lambda^- y_1 + y_2, -y_1 + \lambda^- y_2)$$

onde $\lambda^- = -a_2/b_2$.

Portanto $Z(X, Y)$ é topologicamente equivalente à forma normal $Z_2(X, Y)$. ■

Observe que em $Z_2(X, Y)$ temos $b_1 = 1$ e $b_2 = -1$, assim a solução geral do sistema de equações diferenciais ordinárias associado a X e Y quando se tem uma condição inicial $X_0 = (x_0, 0)$ é dada por $\varphi_1(t, X_0) = x_0 e^{\lambda^+ t} (\cos t, \sin t)$ e $\varphi_2(t, X_0) = x_0 e^{-\lambda^- t} (\cos t, -\sin t)$, respectivamente. De maneira similar à prova do Lema 3 mostramos que os retratos de fases de Z_2 são equivalentes aos da Figura 7 de acordo com os seguintes casos

- se $\lambda^+ - \lambda^- > 0$ temos $|X_2| > |X_0|$, assim o retrato de fases de $Z_1(X, Y)$ é equivalente a:
 - (i) Figura 7 -(c), se $\lambda^+ = 0$ e $\lambda^- < 0$,
 - (ii) Figura 7 -(d), se $\lambda^+ > 0$ e $\lambda^- > 0$ onde $|\lambda^+| > |\lambda^-|$.
- se $\lambda^+ - \lambda^- < 0$ temos $|X_2| < |X_0|$, logo o retrato de fases de Z_1 é equivalente a:
 - (i) Figura 7 -(b), se $\lambda^+ = 0$ e $\lambda^- > 0$,
 - (ii) Figura 7 -(f), se $\lambda^+ < 0$ e $\lambda^- < 0$,
 - (iii) Figura 7 -(e), se $\lambda^+ > 0$ e $\lambda^- > 0$ onde $|\lambda^+| < |\lambda^-|$.
- se $\lambda^+ - \lambda^- = 0$ temos $|X_2| = |X_1|$, assim o retrato de fases de $Z_2(X, Y)$ é equivalente a Figura 7 -(a). ■

4 Regiões de Deslize, Escape e Costura

Nesta seção vamos classificar as regiões de Filippov definidas no conjunto de descontinuidade das formas normais $Z_1(X, Y)$ e $Z_2(X, Y)$.

Temos $Z_1(X, Y) = ((\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2), (\lambda^- y_1 - y_2, y_1 + \lambda^- y_2))$ e $f(x, y) = y$, segue que $Xf = (\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2) \cdot (0, 1) = (x_1 + \lambda^+ x_2)$ e $Xf \Big|_{x_2=0} = x_1$

$Yf = (\lambda^- y_1 - y_2, y_1 + \lambda^- y_2) \cdot (0, 1) = (y_1 + \lambda^- y_2)$ e $Yf \Big|_{y_2=0} = y_1$
 assim, seguindo a terminologia estabelecida por Filippov

- se $x_1 < 0$ e $y_1 > 0$ então $Xf < 0$ e $Yf > 0$ logo, temos uma região de deslize definida em Σ ,
- se $x_1 > 0$ e $y_1 < 0$ então $Xf > 0$ e $Yf < 0$ logo, temos uma região de escape definida em Σ ,
- se $x_1 > 0, y_1 > 0$ e $x_1 < 0, y_1 < 0$ então $Xf \cdot Yf > 0$ logo, temos uma região de costura definida em Σ .

Temos $Z_2(X, Y) = ((\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2), (\lambda^- y_1 + y_2, -y_1 + \lambda^- y_2))$ e $f(x, y) = y$, segue que

$Xf = (\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2) \cdot (0, 1) = (x_1 + \lambda^+ x_2)$ e $Xf \Big|_{x_2=0} = x_1$

$Yf = (\lambda^- y_1 + y_2, -y_1 + \lambda^- y_2) \cdot (0, 1) = (-y_1 + \lambda^- y_2)$ e $Yf \Big|_{y_2=0} = -y_1$

assim, seguindo a terminologia estabelecida por Filippov

- se $x_1 < 0$ e $y_1 < 0$ então $Xf < 0$ e $Yf > 0$ logo, temos uma região de deslize definida em Σ ,
- se $x_1 > 0$ e $y_1 > 0$ então $Xf > 0$ e $Yf < 0$ logo, temos uma região de escape definida em Σ ,
- se $x_1 > 0, y_1 < 0$ e $x_1 < 0, y_1 > 0$ então $Xf \cdot Yf > 0$ logo, temos uma região de costura definida em Σ .

5 Prova do Teorema A

Segue dos Lemas 3 e 4 que $Z(X, Y)$ é topologicamente equivalente a uma das formas normais

(i) $Z_1(X, Y) = ((\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2), (\lambda^- y_1 - y_2, y_1 + \lambda^- y_2)),$

(ii) $Z_2(X, Y) = ((\lambda^+ x_1 - x_2, x_1 + \lambda^+ x_2), (\lambda^- y_1 + y_2, -y_1 + \lambda^- y_2)),$

e os retratos de fases são equivalentes aos exibidos na Figura 1. ■

6 Conclusão

Determinamos as formas normais para os campos vetoriais descontínuos $Z(X, Y) \in X^r(\mathbb{R}^2)$, exibimos seus retratos de fases e classificamos as regiões definidas no conjunto de descontinuidade Σ . Continuaremos a estudar o comportamento das órbitas de Z em Σ e os campos de Filippov definidos neste conjunto através da forma normal equivalente ao campo.

Referências

- [1] Han M., Zhang W., *On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems*, Journal of Differential Equations **248** (2010), 2399–2416.
- [2] LLIBRE J., MEDRADO J. C. R., TEIXEIRA M. A., *Piecewise linear systems with two real saddles*.
- [3] MACIEL A. L. , *Bifurcações de campos vetoriais descontínuos* Tese de doutorado (2009), USP, São Paulo.
- [4] MEDRADO J. C. R. AND LLIBRE J., *Darboux integrability and reversible quadratic vector fields*. Rocky Mountain J. Math. **35** (2005), no. 6, 1999–2057.
- [5] Perko L., *Differential equations and dynamical systems, Texts in applied mathematics*, Vol. 7, Springer–Verlag, New York. (1991)