

# Dinâmica não-linear de placas retangulares

Flávio Augusto Xavier Carneiro Pinho<sup>1,a</sup>, Frederico Martins Alves da Silva<sup>2,b</sup>

Universidade Federal de Goiás, 74605-220, Brasil

<sup>a</sup>flavio\_augusto1@hotmail.com, <sup>b</sup>silvafma@eec.ufg.br

PALAVRAS-CHAVE: placas retangulares, Galerkin Iterativo, dinâmica não-linear.

## 1 INTRODUÇÃO

Placas retangulares, tais como lajes, pilares-parede e tabuleiros de pontes, são estruturas bastante susceptíveis a carregamentos dinâmicos, tais como máquinas rotativas e tráfego de pedestres. As novas tecnologias construtivas permitem planejar e construir estruturas cada vez mais esbeltas com vãos cada vez maiores. Para este tipo de estruturas, com deslocamentos e flexibilidade elevados, a análise dinâmica é fundamental.

Achar uma solução para a equação diferencial parcial dinâmica de placas e encontrar uma função para o deslocamento transversal é fundamental para estudar seu comportamento dinâmico, o que nem sempre é fácil. Para placas apoiadas em bordas opostas, a solução do problema de placa pode ser encontrada de forma analítica. Para outras combinações das condições de contorno, alguns trabalhos utilizam o método de Ritz (Dickinson, 1971; Bassily e Dickinson, 1972) ou o método de Galerkin (Bedair e Sherbourne, 1994; Ilanko, 2002; Amabili, 2004) para obter as frequências naturais ou as cargas críticas de placas, usando, geralmente, uma soma de funções de vigas para aproximar a solução do problema. Para a solução generalizada do problema alguns métodos têm sido propostos por vários pesquisadores (Saha, 2005; Machado, 2007).

Neste trabalho, utilizou-se o método de Galerkin Iterativo (Machado, 2007) para encontrar uma solução para a análise de carga crítica de flambagem e para a análise de vibração livre não-linear para placas submetidas a diversas condições de contorno.

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### 2.1 EQUAÇÕES DA PLACA RETANGULAR

<sup>1</sup> Orientando

<sup>2</sup> Orientador

A placa retangular em questão tem comprimento  $a$ , largura  $b$ , espessura  $h$  e é feita com um material elástico linear. A placa é orientada por um sistema de eixos cartesianos, sendo  $x$  e  $y$  posicionados no plano médio da placa e  $z$  é o eixo normal ao plano médio da placa, conforme mostrado na Figura 1a.

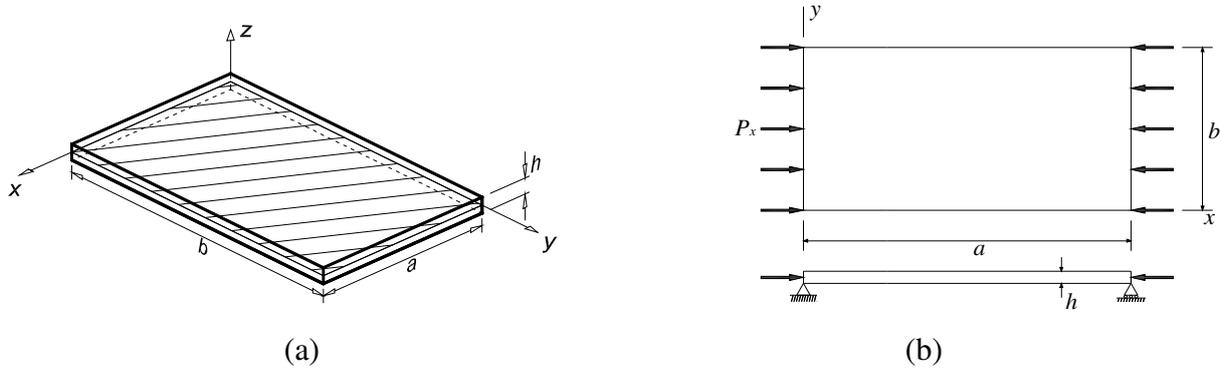


Figura 1. (a) Placa retangular. (b) Placa submetida à compressão no plano.

Para um elemento infinitesimal da placa submetido a uma carga transversal  $p$ , normal ao plano da placa, conforme ilustrado na Figura 2, as forças e os momentos agindo nas laterais do elemento infinitesimal são expressos por unidade de comprimento ao longo da borda. O problema de placas passa de um problema tridimensional para um problema bidimensional relacionando-se a intensidade das forças e dos momentos, agindo sobre este elemento ao longo de suas bordas, com as tensões internas, de acordo com as equações (Brush e Almroth, 1975):

$$\begin{aligned}
 [N_x, N_y, N_{xy}] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}] dz & [Q_x, Q_y] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}] dz \\
 [M_x, M_y, M_{xy}] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}] z dz & &
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde os valores de  $N_x$  e  $N_y$  são as forças normais;  $N_{xy}$  e  $N_{yx}$  são as forças cisalhantes no plano da placa;  $Q_x$  e  $Q_y$  são as forças cisalhantes transversais;  $M_x$  e  $M_y$  são os momentos fletores.  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  são os momentos torçores. As componentes de tensão normal em qualquer ponto ao longo da espessura da placa são  $\bar{\sigma}_x$  e  $\bar{\sigma}_y$ , enquanto  $\bar{\tau}_{xz}$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$ ,  $\bar{\tau}_{xy}$  e  $\bar{\tau}_{yx}$  são as componentes de tensão cisalhante.

Os símbolos  $\beta_x$  e  $\beta_y$  da Figura 2 representam as rotações do elemento da placa nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. As forças, os momentos e as rotações variam ao longo do elemento infinitesimal, e a notação  $N_x^*$  é usada para representar a soma de  $N_x$  com o acréscimo de sua variação ao longo do elemento infinitesimal, conforme o exemplo a seguir:

$$N_x^* = N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \quad (2)$$

que nos demais casos pode ser replicado.

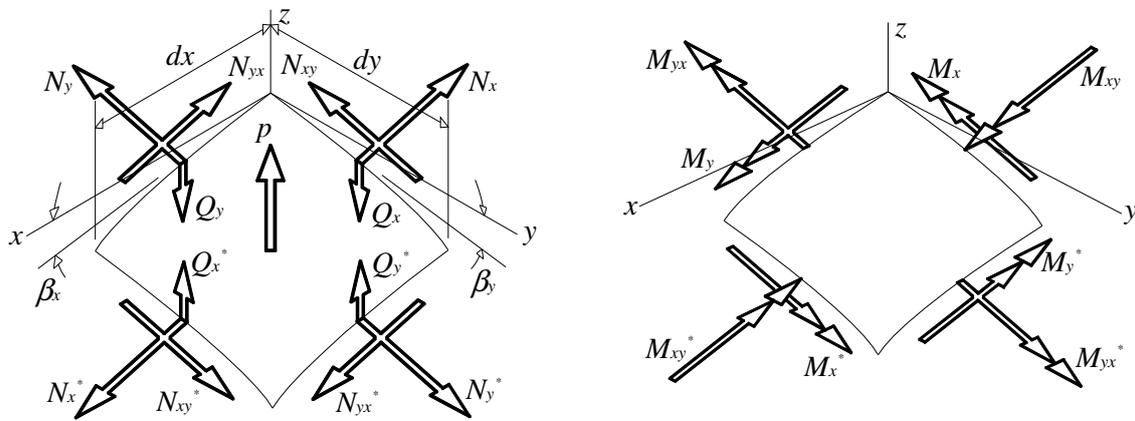


Figura 2. Elemento infinitesimal em sua configuração deformada.

Pelas aproximações conhecidas como hipóteses de Kirchhoff, as tensões normais transversais  $\bar{\sigma}_z$  são pequenas se comparadas às demais componentes de tensões normais e podem ser desprezadas. Por sua vez, as deformações  $\bar{\epsilon}_x$ ,  $\bar{\epsilon}_y$  e  $\bar{\gamma}_{xy}$  em qualquer ponto da placa podem ser expressas pelos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  do plano médio da placa, referentes às direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 - z w_{,xx} \\ \bar{\epsilon}_y &= v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 - z w_{,yy} \\ \bar{\gamma}_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} - 2z w_{,xy} \end{aligned} \quad (3)$$

As deformações em qualquer ponto de uma placa isotrópica tridimensional são expressas pela lei de Hooke generalizada, dadas por:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_x - \nu(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)] & \bar{\varepsilon}_y &= \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_y - \nu(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_z)] \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\tau}_{xy}\end{aligned}\tag{4}$$

onde  $\nu$  e  $E$  são, respectivamente, os valores do coeficiente de Poisson e do módulo de elasticidade.

A partir das equações (1), (3) e (4), sendo que para as equações (4) o valor das tensões transversais  $\bar{\sigma}_z$  é nulo, obtêm-se o conjunto de equações (5), no qual os esforços internos são dados pelos campos de deslocamentos, a saber:

$$\begin{aligned}N_x &= C \left( \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + \nu \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) \right) & M_x &= -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ N_y &= C \left( \left( v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + \nu \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) \right) & M_y &= -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\ N_{xy} &= \frac{C(1-\nu)}{2} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}) & M_{xy} &= D(\nu - 1) w_{,xy} \\ C &= \frac{Eh}{1-\nu^2} & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\end{aligned}\tag{5}$$

A partir do somatório das forças e dos momentos de um elemento infinitesimal em sua configuração deformada, representado pela Figura 2, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  chega-se, após algumas manipulações matemáticas, a um sistema de três equações diferenciais parciais não-lineares de equilíbrio dado por:

$$\begin{aligned}N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ D\nabla^4 w - (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) &= p\end{aligned}\tag{6}$$

onde,  $\nabla^4 w = w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}$ .

## 2.2 PROBLEMA DE CARGA CRÍTICA

Para obter a carga crítica que provoca a flambagem da placa retangular, estuda-se a existência de uma configuração de equilíbrio adjacente à configuração de equilíbrio crítico. Para isto, aplicam-se pequenos incrementos às variáveis de deslocamento e avalia-se a nova configuração incremental de equilíbrio. O incremento no campo de deslocamento é dado por:

$$u \rightarrow u_0 + u_1 \qquad v \rightarrow v_0 + v_1 \qquad w \rightarrow w_0 + w_1 \quad (7)$$

onde o incremento de deslocamento  $(u_1, v_1, w_1)$  é pequeno o suficiente,  $(u_0, v_0, w_0)$  é a configuração de equilíbrio na configuração não perturbada e  $(u, v, w)$  representa a nova configuração de equilíbrio.

Introduzindo as equações (7) nas equações (6) e linearizando as equações resultantes, têm-se as equações de equilíbrio crítico de uma placa esbelta submetida a carregamentos no plano:

$$\begin{aligned} N_{x1,x} + N_{xy1,y} &= 0 \\ N_{xy1,x} + N_{y1,y} &= 0 \\ D\nabla^4 w_1 - (N_{x0}w_{1,xx} + 2N_{xy0}w_{1,xy} + N_{y0}w_{1,yy}) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

onde os termos  $N_{x0}$ ,  $N_{y0}$  e  $N_{xy0}$  correspondem aos esforços da configuração de equilíbrio;  $N_{x1}$ ,  $N_{y1}$  e  $N_{xy1}$  correspondem aos esforços incrementais presentes na nova configuração de equilíbrio.

Quando a placa é submetida a uma força  $P_x$  de compressão uniformemente distribuída ao longo das bordas,  $x = 0$  e  $x = a$ , ilustrada pela Figura 1b, tem-se que:

$$N_{x0} = -\frac{P_x}{b} \qquad N_{xy0} = N_{y0} = 0 \quad (9)$$

Na análise estática linear, as duas primeiras equações de (8) estão desacopladas à terceira equação. Desta forma, partindo das equações (9), o problema de carga crítica é descrito por:

$$D\nabla^4 w + \frac{P_x}{b} w_{,xx} = 0 \quad (10)$$

Para encontrar um valor para o deslocamento transversal  $w$  que satisfaça a equação (10) e um conjunto de condições de contorno atuando nas bordas da placa, será utilizado o método do Galerkin Iterativo.

### 2.3 PROBLEMA DE VIBRAÇÃO LIVRE

Para obter a frequência natural e modos de vibração, deve-se introduzir o conceito de inércia transversal, que é definido como uma força transversal ao plano médio da placa com sentido inverso ao movimento. Desta maneira, pode-se substituir  $p$  da terceira equação de (6) por:

$$p = -\bar{m}\ddot{w} \quad (11)$$

onde  $\bar{m}$  é a massa por unidade de área

Linearizando equação resultante, a parcela  $(N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy})$  é desprezada, e a equação diferencial de equilíbrio dinâmico, para o estudo da vibração livre, é dada por:

$$D\nabla^4 w + \bar{m}\ddot{w} = 0 \quad (12)$$

A exemplo da análise de carga crítica, será utilizado o método de Galerkin Iterativo para encontrar um valor para o deslocamento transversal  $w$  que satisfaça a equação (12) e um conjunto de condições de contorno atuando nas bordas da placa.

### 2.4 PROBLEMA DE VIBRAÇÃO NÃO-LINEAR

As equações não-lineares de equilíbrio, equação (6), aparecem como um sistema de três equações diferenciais não-lineares que pode ser simplificado em um sistema com duas equações e duas variáveis através das funções de tensão de Airy,  $f(x, y)$ , definidas pelas seguintes relações (Brush & Almroth, 1975):

$$N_x = f_{,yy} \qquad N_y = f_{,xx} \qquad N_{xy} = -f_{,xy} \qquad (13)$$

Estas expressões satisfazem, automaticamente, as duas primeiras equações de (6) e, introduzindo as funções de tensão na terceira equação de (6), tem-se que:

$$D\nabla^4 w - (f_{,yy}w_{,xx} - 2f_{,xy}w_{,xy} + f_{,xx}w_{,yy}) = p \qquad (14)$$

A exemplo da vibração livre não-amortecida, considera-se que a força de inércia  $p$  é igual a  $-\bar{m}\ddot{w}$ .

Observa-se que a equação (14) possui duas incógnitas,  $w(x,y)$  e  $f(x,y)$ . Necessita-se de mais uma equação para que a solução da equação (14) seja possível e determinada. Para tanto, a partir da equação de compatibilidade geométrica (lado esquerdo da equação (15)), dada pela teoria da elasticidade, e das equações (3), tem-se que:

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} - \gamma_{xy,xy} = w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} \qquad (15)$$

sendo  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  as deformações no plano médio da placa, correspondentes às deformações de (3) para  $z = 0$ .

A partir das equações (3), (5) e (13), as deformações do plano médio,  $z = 0$ , podem ser escritas como:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh}(f_{,yy} - \nu f_{,xx}) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{Eh}(f_{,xx} - \nu f_{,yy}) \qquad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{Eh}f_{,xy} \qquad (16)$$

Substituindo as equações (16) em (15), chega-se a equação de compatibilidade geométrica da placa, dada por:

$$\nabla^4 f - Eh(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy}) = 0 \qquad (17)$$

As equações (14) e (17) são conhecidas como equações de equilíbrio e de compatibilidade, respectivamente. Sua solução permite analisar o comportamento não-linear de placas esbeltas.

### 3 GALERKIN ITERATIVO

O método de Galerkin iterativo, proposto por Machado (2007), tem como objetivo encontrar a função  $w$ , referente ao deslocamento transversal da placa, através de iterações realizadas a partir das equações diferenciais parciais de equilíbrio (10) ou (12), referentes, respectivamente, à análise de carga crítica e à análise de vibração livre, de forma que  $w$  atenda às condições de contorno da placa e às equações de equilíbrio.

Para encontrar uma solução para o deslocamento transversal através do método de Galerkin iterativo, a função  $w$  será dividida em duas funções,  $X(x)$  e  $Y(y)$ , referentes respectivamente às direções  $x$  e  $y$ , através do método de separações das variáveis. Desta forma, tem-se que:

$$w(x, y) = X(x)Y(y) \tag{18}$$

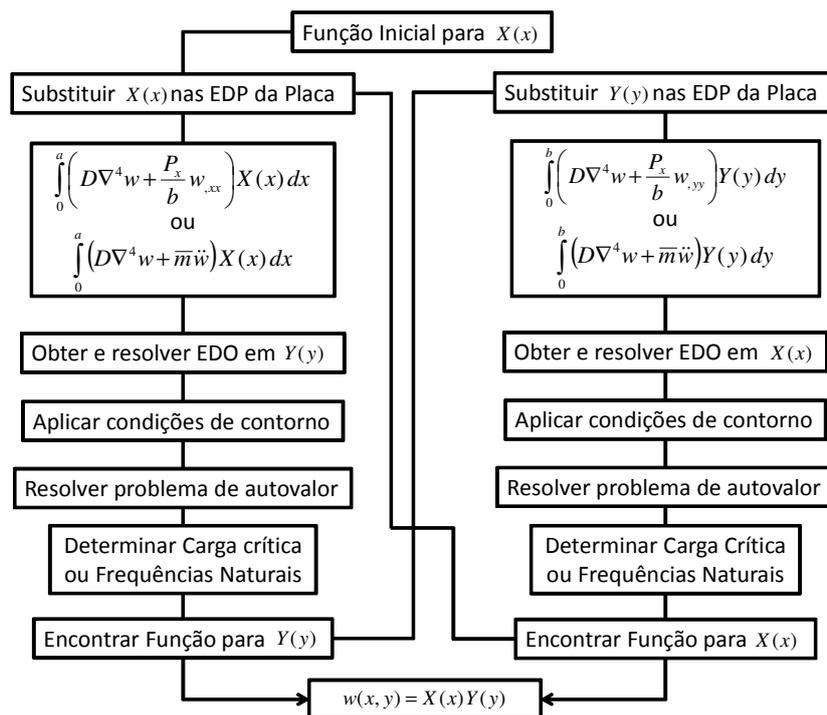


Figura 3. Fluxograma do Método de Galerkin iterativo.

Inicialmente é usada uma aproximação polinomial para  $X(x)$  que atenda às condições de contorno impostas pelo problema em  $x = 0$  e  $x = a$ . Obtêm-se uma EDO em  $Y(y)$  a partir das equações (19) e (20). Aplicando as condições de contorno em  $y = 0$  e  $y = b$  e resolvendo a EDO em  $Y(y)$  chega-se a um problema clássico de autovalor e autovetor, que

são dados, respectivamente, pelos valores da carga crítica ou frequência natural e os valores das constantes da autofunção  $Y(y)$ .

$$\int_0^a \left( D\nabla^4 w + \frac{P_x}{b} w_{,xx} \right) p(x) dx \quad (19)$$

$$\int_0^a (D\nabla^4 w + \bar{m}\ddot{w}) p(x) dx \quad (20)$$

Uma vez obtida função  $Y(y)$ , segue-se com o mesmo procedimento para determinar uma nova função para  $X(x)$  mais precisa que a aproximação polinomial inicial. Este procedimento é repetido diversas vezes, a partir das novas autofunções encontradas para  $X(x)$  e  $Y(y)$ , até que a diferenças entre as iterações seja arbitrariamente pequena. O fluxograma da Figura 3 ilustra as etapas das iterações do método de Galerkin Iterativo.

#### 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Tabela 1. Resumo das condições contorno de placas.

Tipo de suporte em $x = a$	Expressão matemática
Simplesmente Apoiada – A	$(w)_{x=a} = 0;$
	$(M_x)_{x=a} = 0$
Engastada – E	$(w)_{x=a} = 0;$
	$(w_{,x})_{x=a} = 0$
Livre – L	$(M_x)_{x=a} = 0;$
	$(Q_x)_{x=a} = 0$

As condições de contorno que atuam nas bordas da placa estão exemplificadas pela Tabela 1, para a borda  $x = a$ , e podem ser replicadas para as demais bordas. Será usada a notação E-A-E-L, por exemplo, para definir as condições de contorno: engastada em  $x = 0$  e  $x = a$ ; simplesmente apoiada em  $y = 0$ ; e, livre em  $y = b$ . Os valores de  $m$  e  $n$  representarão os modos de flambagem ou de vibração da placa, e são equivalentes ao número de semi-ondas das autofunções encontradas para o deslocamento transversal nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

#### 4.1 PROBLEMA DE CARGA CRÍTICA

Os resultados obtidos no problema de carga crítica serão apresentados para uma relação  $a/b$  das dimensões da placa. O valor da carga crítica  $P_x$  será representado pelo valor adimensional  $k_c$  conforme a equação (21).

$$k_c = P_x \frac{b}{\pi^2 D} \quad (21)$$

Para uma placa apoiada em  $x = 0$  e  $x = a$ , a solução da equação (10) pode ser encontrada de forma analítica considerando a solução da parcela  $X(x)$  do deslocamento transversal dada pela equação (22), que satisfaz tanto as condições de contorno quanto a equação de equilíbrio (10).

$$X(x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (22)$$

A Figura 4 apresenta os resultados obtidos para as primeiras cargas críticas flambagem de uma placa apoiada nas bordas  $x = 0$  e  $x = a$  variando-se a relação  $a/b$  e para diversas condições de contorno nas bordas  $y = 0$  e  $y = b$ .

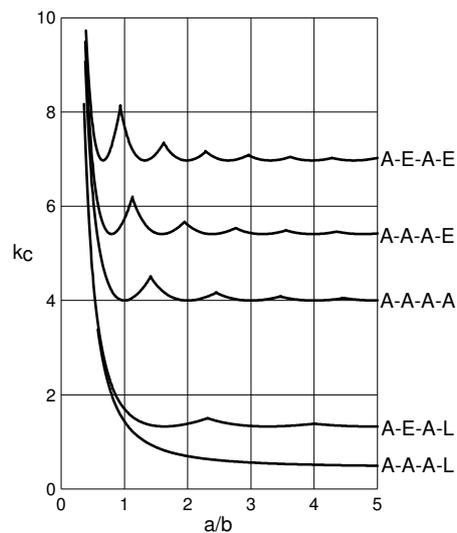
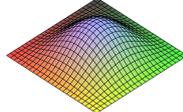
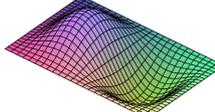
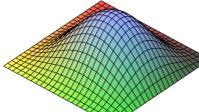
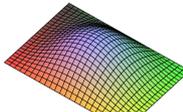
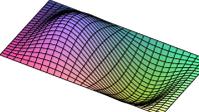


Figura 4. Relação entre  $k_c$  e  $a/b$  para placas apoiadas em  $x = 0$  e  $x = a$ .

Tabela 2. Resultados de  $k_c$  para  $n = 1$  obtidos através do Galerkin iterativo.

Condições de Contorno	$m$	$a/b$	$k_c$ - Presente Trabalho	$k_c$ - Brush & Almroth (1975) <sup>1</sup>	Diferença	Modos de flambagem
E-E-E-E	1	1,00	10,7043	10,4	-2,93%	
	2	1,50	8,5673	8,5	-0,79%	
E-A-E-E	1	1,00	8,2265	8,1	-1,56%	
	1	1,50	5,6346	5,5	-2,45%	
E-A-E-A	2	2,00	4,8912	4,9	0,18%	

<sup>1</sup> Os valores foram obtidos através de gráficos.

Para as demais combinações das condições de contorno, a solução (22) não é mais válida. Desta forma, encontrar uma solução analítica para o deslocamento transversal se torna inviável. Utilizou-se, então, o método numérico de Galerkin Iterativo para a solução do problema de carga crítica de uma placa submetida a outras condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = a$ . A Tabela 2 apresenta alguns resultados obtidos para a primeira carga crítica de flambagem de uma placa submetida a diversas condições de contorno e relação  $a/b$ .

Os resultados do método de Galerkin Iterativo para o problema de carga crítica apresentaram uma diferença relativamente pequena com os encontrados na literatura. Deve-se ressaltar a imprecisão dos resultados retirados a partir de gráficos.

## 4.2 PROBLEMA DE VIBRAÇÃO LIVRE

Para o problema de vibração livre, linear ou não-linear, de placas, o deslocamento transversal é dado por:

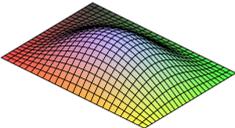
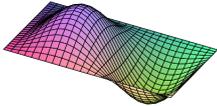
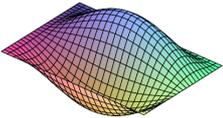
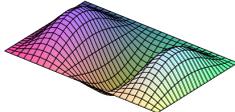
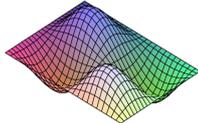
$$w(x, y, t) = X(x)Y(y)\theta(t) \quad (23)$$

O deslocamento  $\theta(t)$ , função do tempo, é uma função harmônica dada por:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) \quad (24)$$

onde a frequência é dada por  $\omega_0$  e  $A$  é a amplitude de vibração.

Tabela 4. Parâmetro de frequência  $\lambda$  para uma placa E-E-A-A de dimensões  $a/b = 1,5$

Sequência Modal	$(m, n)$	Presente Trabalho	Leissa (1973)	Diferença	Modos de vibração
1	(1,1)	44,896	44,893	0,007%	
2	(2,1)	76,554	76,554	0,000%	
3	(1,2)	122,324	122,330	-0,005%	
4	(3,1)	129,399	129,410	-0,008%	
5	(2,2)	152,535	152,580	-0,030%	

Considerou-se uma placa com dimensões  $a = 15\text{m}$ ,  $b = 10\text{m}$  e  $h = 0,20\text{m}$ . A placa tem  $\bar{m} = 5\text{kg/m}^2$ ,  $E = 30\text{GPa}$  e  $\nu = 0,3$ . Foram calculados os valores da frequência

natural  $\omega_0$  pelo método do Galerkin iterativo para o parâmetro  $\lambda = \omega_0 a^2 \sqrt{\bar{m}/D}$ , mostrados na Tabela 4 e comparadas com os valores publicados por Leissa (1969).

O deslocamento transversal está exemplificado pela equação (25) para o primeiro modo de vibração da placa:

$$w = \begin{pmatrix} 0.598\text{sen}(0.380y) - 0.463 \cos(0.380y) \\ -0.463 \text{senh}(0.492y) + 0.463 \cosh(0.492y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.791\text{sen}(0.237x) - 0.353\cos(0.237x) \\ -0.353\text{senh}(0.532x) + 0.353\cosh(0.532x) \end{pmatrix} \quad (25)$$

O método de Galerkin iterativo se mostrou bastante eficaz para a análise de vibração livre e determinação da frequência natural, levando-se em consideração a diferença entre os resultados obtidos com os resultados da literatura.

### 4.3 PROBLEMA DE VIBRAÇÃO NÃO-LINEAR

O problema de vibração não-linear pode ser simplificado pelas funções de tensão de Airy dadas pela equação (13). Pode-se encontrar a função de tensão  $f(x, y)$  pelo método dos coeficientes a determinar a partir da equação de compatibilidade (17) e do deslocamento transversal modal  $w$  encontrado pelo método de Galerkin iterativo para a análise de vibração livre. Assume-se, então, através da integral de Galerkin-Urabe dada pela equação (26), a relação frequência/amplitude de uma placa retangular.

$$\int_0^{2\pi/\omega} \int_0^b \int_0^a (D\nabla^4 w - (f_{,yy}w_{,xx} - 2f_{,xy}w_{,xy} + f_{,xx}w_{,yy}) + \bar{m}\ddot{w}) \frac{w}{A} dx dy dt \quad (26)$$

Para uma placa de dimensões  $a = 10\text{m}$ ,  $b = 10\text{m}$  e  $h = 0,20\text{m}$  e material sendo  $\bar{m} = 5\text{kg/m}^2$ ,  $E = 30\text{GPa}$  e  $\nu = 0,3$ , tem-se uma relação frequência/amplitude para diversas condições de contorno da placa, ilustrada pela Figura 5. O eixo vertical é expresso pelos valores da amplitude  $A$  divididos pela espessura  $h$  da placa. O eixo horizontal ( $\Omega$ ) representa os valores da frequência não-linear da placa divididos pela menor frequência linear da placa.

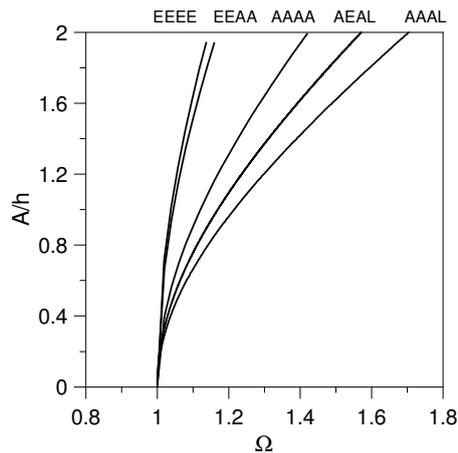


Figura 5. Relação frequência/amplitude de uma placa retangular.

A placa apresenta um comportamento com ganho de rigidez – incrementos na frequência natural resultam em incrementos na amplitude da placa. Percebe-se que a placa AAAL, por exemplo, tem um comportamento mais não linear que a EEEE, devido à flexibilidade do sistema.

## 5 CONCLUSÃO

No presente trabalho buscou-se a solução para a carga crítica de flambagem da placa e para o problema de vibração livre linear e não-linear. Para placas apoiadas em bordas opostas, a solução pode ser encontrada de forma analítica. Para as demais condições de contorno utilizou-se o método Galerkin iterativo, que recai em um problema de autovalor e autovetor, dados respectivamente pelo valor da carga crítica de flambagem (problema de carga crítica) ou da frequência natural (problema de vibração livre), e pela função  $w$  do deslocamento transversal, dividida nas direções  $x$  e  $y$ . Através dos deslocamentos encontrados para a análise de vibração livre pode-se fazer uma análise dinâmica não-linear através das funções de tensão de Airy. A análise não-linear permitiu estabelecer uma relação frequência-amplitude, que comprovou o comportamento com ganho de rigidez de uma placa retangular.

## REFERÊNCIAS

AMABILI, M. Nonlinear vibration of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments. **Computers and Structures**, v. 82, p. 2587-2605, 2004.

BASSILY, S.F., DICKINSON, S.M. Buckling and lateral vibration of rectangular plates subject to in-plane loads – A Ritz approach. **Journal of Sound Vibration**, v. 24, p. 219-239, 1972.

BEDAIR, O.K., SHERBOURNE, A. On the stability of plates under combined compression and in-plane bending. **Computer and Structure**, v. 53, p. 1453-1464, 1994.

BRUSH, D. O., ALMROTH, B. O. **Buckling of bars, plates and shells**. United State of America: McGraw-Hill, 1975.

DICKINSON, S.M. Lateral vibration of rectangular plates subject to in-plane forces. **Journal of Sound Vibration**, v. 31, p. 257-293, 1973.

ILANKO, S. Vibration and post-buckling of in-plane loaded rectangular plates using a multiterm Galerkin's method. **Journal of Applied Mechanics – ASME**, v. 69, p. 589-592, 2002.

LEISSA, A. W. The free vibration of rectangular plates. **Journal of Sound and Vibration**, v 31, p. 257-293, 1973.

MACHADO, F. J. D. **Análise e controle passivo das vibrações de placas retangulares**. Rio de Janeiro, 2007, 97 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

SAHA, K. N., MISRA, D., GHOSAL, S., POHIT, G. Nonlinear free vibration analysis of square plates with various boundary conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v 287, p. 1031–1044, 2005.