Divaldo Portilho Fernandes Júnior [1]

Valdivino Vargas Júnior [2]

aleatorjr77@gmail.com [1] e vvjunior@mat.ufg.b [2]

Universidade Federal de Goiás
CEP 74001-970, Brasil

CONCEITOS E SIMULAÇÃO DE CADEIAS DE MARKOV

Resumo

O presente estudo foi feito para contemplar processos estocásticos a tempo discreto concentrado-se principalmente em Cadeias de Markov e simulação. Outro tópico apresentado que também é de grande relevância no estudo probabilístico é o passeio aleatório. Foram utilizados métodos que visam calcular transições do processo markoviano por meio de potências da matriz estocástica. Em virtude da complexidade nas manipulações algébricas, fez-se uso do Maxima, manipulador algébrico precursor do Maple.

PALAVRAS - CHAVE: Cadeias de Markov, simulação, passeio aleatório.

[1] Orientando Bolsista PIVIC
[2] Orientador.
Revisado pelo Orientador

1 INTRODUÇÃO

A própria natureza dos cálculos em probabilidade nos conduz ao questionamento se existe ou não dependência na ocorrência de fenômenos simultâneos ou sucessivos. Será que ao retirarmos sucessivamente duas bolas de uma urna que contem inicialmente 7 bolas azuis e 3 brancas, essas retiradas serão dependentes? Caso sejam, de que tipo seria essa dependência? E se as retiradas fossem simultâneas? Por mais simples que pareçam, essas questões fazem parte do alicerce da teoria de probabilidades e foi a busca por respostas a perguntas similares a estas que levaram grandes matemáticos como Thomas Bayes, Kolmogorov, Fisher, Pearson e muitos outros, a contribuírem no desvendar desse fascinante universo das incertezas. Em particular, pode-se citar Andrei Markov, precursor no estudo da propriedade da *perda de memória*, propriedade que levou ao desenvolvimento da teoria sobre Cadeias de Markov, ferramenta de grande aplicabilidade nos mais diversos ramos da ciência.

Um dos exemplos mais clássicos de aplicabilidade das Cadeias de Markov talvez seja em teoria dos jogos, onde pode-se provar com indiscutível simplicidade o problema da *ruína do jogador*. Outro ramo bastante fecundo em cadeias de Markov é a teoria de filas, a qual busca modelar matematicamente o comportamento de uma fila a fim de satisfazer da melhor forma possível o cliente, usuário da fila, e de modo que seja economicamente viável ao prestador de serviços. Na mesma linha de importância, podemos citar também a aplicabilidade dessa teoria em processos migratórios, epidemiológicos, difusão de informação e muitos outros.

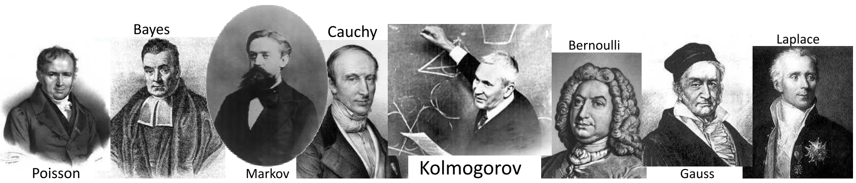

Figura 1: Grandes Matemáticos

2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é a inserção no ambiente de pesquisa e a integração do aluno pesquisador de graduação que busca conhecimento nas áreas afins a probabilidade e estatística. Neste trabalho, o aluno fez estudos que envolvia os conceitos básicos de Cadeias de Markov, concentrando-se principalmente na questão de simulações de cadeias a tempo discreto. Antes desse estudo em particular, foram revisados os seguintes conteúdos:

- Análise Combinatória,
- Probabilidade,
- Teoria básica de grafos,
- Processos Estocásticos.

Após estudar os assuntos citados acima, foram analisados alguns exemplos clássicos de Cadeias de Markov, implementou-se algoritmos com aplicações que utilizaram esses conceitos. Por fim, um modelo de disseminação de informação com características markovianas foi apresentado e implementado computacionalmente.

3 PROCESSO ESTOCÁSTICO

A concepção de processo estocástico é uma extensão do que a probabilidade define por *variável aleatória*. De modo geral, uma coleção de variáveis aleatórias X_t indexadas em um conjunto de índices $\mathbb{T}$, $t \in \mathbb{T}$, frequentemente interpretado como *tempo*, é chamado de processo estocástico. O conjunto $\mathbb{S}$ no qual a variável aleatória X_t assume valores é o conjunto de estados do processo. Um exemplo de processo estocástico é dado pelo *capital acumulado* por uma pessoa que aposta em um jogo de cara e coroa no qual o jogador ganha R$ 1,00 caso ocorra cara no lançamento da moeda, ou perde R$ 1,00 se der coroa.

Representando por X_t o valor recebido ou pago à banca pelo jogador na t-ésima jogada, com $t \in \mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, ou seja, a variável aleatória dada por:

$$X_t = \begin{cases} 1, & \text{se der } cara; \\ -1, & \text{se der } coroa. \end{cases}$$

Sendo assim, $S_n = S_0 + \sum_{t=1}^{n} X_t$ é o capital acumulado pelo jogador que iniciou com um capital S_0. No caso em que as variáveis $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são independentes, identicamente distribuídas é chamado de passeio aleatório simples. Observe que dada a fortuna atual do jogador, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sua fortuna na próxima rodada,$\{S_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, não depende de todas as etapas que o trouxeram até o presente momento, isto é,

$$P(S_{n+1} = j | S_0 = i_0, S_1 = i_1, \ldots, S_n = i) = P(S_{n+1} = j | S_n = i).$$

Essa é a *semente*, no âmbito teórico, das *Cadeias de Markov*, a independência entre passado e o futuro se há o conhecimento do resultado no presente.

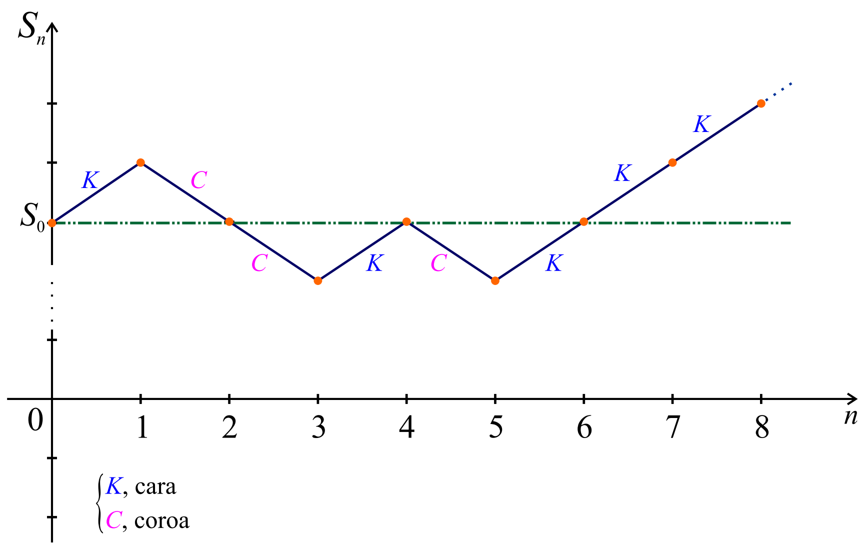

Figura 2: Exemplo de realização do passeio aleatório

Se $P(X_t = 1) = p$ e $P(X_t = -1) = 1 - p$, então a probabilidade da fortuna acumulada pelo jogador até o instante *n* ser $S_n = S_0 + k$, desde de que $n + k$ seja par e $| \ k \ | \leq n$, é dada por:

$$P(\ \sum_{t=1}^{n} X_t = k\ ) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}.$$

4 CADEIA DE MARKOV

A perda de memória é a base da caracterização das cadeias de Markov e ela estabelece que em um conjunto de estados discretos o futuro só depende do estado presente, ou seja, os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Em termos de probabilidades, uma cadeia de Markov a tempo discreto com espaço de estados $\mathbb{S}$ é um processo estocástico $\{X_n\}_{n\in\mathbb{T}}$, onde $\mathbb{T}$ = {0, 1, 2, ...}, tal que se verificam as seguintes propriedades:

- Para qualquer $i \in \mathbb{S}$ tem-se:

  $P(X_0 = i) = P_i.$

- Para quaisquer $i, j \in \mathbb{S}$, e $n \in \mathbb{T}$:

  $P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P_{ij}.$

- Para quaisquer $n \in \mathbb{T}$ e $i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j \in \mathbb{S}$, vale a condição:

  $P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \dots , X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j|X_n = i).$

No caso $X_n = i$ diz-se que o processo no instante n está no estado i. Em especial, a terceira propriedade nos diz que dado o presente (X_n), o futuro (X_{n+1}) e o passado $(X_0, X_1, ..., X_{n-1})$ *são independentes*.

Exemplo 01

Considere uma partícula realizando movimentos aleatórios sobre os vértices de um cubo. Suponha que a cada passo a partícula escolha saltar para um vértice vizinho, tendo a mesma probabilidade de saltar para cada um deles.

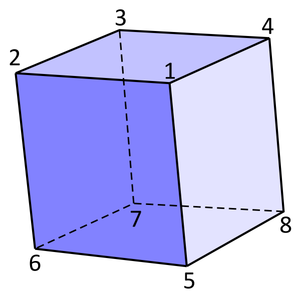

Figura 3: Cubo

Temos $\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Se X_n é a posição da partícula no tempo n, então,

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } i \text{ e } j \text{ estão conectados,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nesse exemplo, como $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ é independente de n, a cadeia de Markov possui probabilidades de transição estacionárias e o processo é chamado de cadeia de Markov homogênea. Assim, ter uma Cadeia Homogênea implica que as Probabilidades de Transição não mudam ao longo do tempo.

Para cadeias de Markov homogêneas, $P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P_{ij}$.

Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{T}}$ uma cadeia de Markov homogênea com espaço de estados discretos $\mathbb{S} = \{1, 2, 3, ...\}$. Nesse caso, tem-se $P_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$, $i, j \geq 0$ independente de n.

Uma maneira intuitiva de apresentar e operacionalizar as probabilidades de transição entre os estados é dada por meio de uma matriz estocástica, conhecida por *matriz de transição*. Essa matriz é definida por:

$$P = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Onde os elementos satisfazem:

i) $p_{ij} \geq 0$;

ii) $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$, para todo i = 0,1, 2, ...

Se $\mathbb{S} = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$

$$P = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} p_{i_1 i_2} & p_{i_1 i_3} & \cdots & p_{i_1 i_m} \\ p_{i_2 i_1} & p_{i_2 i_2} & \cdots & p_{i_2 i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i_m i_1} & p_{i_m i_2} & \cdots & p_{i_m i_m} \end{pmatrix}.$$

Com

i) $p_{ij} \geq 0$;

ii) $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$, para todo $i \in \mathbb{S}$.

Nessa matriz cada um dos seus elementos informa as transições entre estados, ou seja, P_{ij} fornece a probabilidade de transição do estado i para o estado j a um passo.

No caso da Cadeia de Markov estabelecida no exemplo 01, temos que:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que em particular a probabilidade da partícula sair do vértice 4 e ir para o vétice 3 em um passo é dada por $p_{43} = \frac{1}{3}$.

4.1 Equação de Chapman-Kolmogorov

Seja o conjunto de estados $\mathbb{S} = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$. Estão, numa cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{T}}$ homogênea prova-se que

$P(X_{m+1} = i_1, X_{m+2} = i_2, ..., X_{m+n} = i_n | X_m = i_0) = P_{i_0,i_1} P_{i_1,i_2} P_{i_2,i_3} ... P_{i_{n-1},i_n}$.

Escreva $P^{(n)}_{i,j} = P(X_{m+n} = j | X_m = i)$, ou seja, a probabilidade de passagem do estado i para o estado j a partir do passo m em n passos.

Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{T}}$ uma cadeia de Markov a tempo discreto com espaço de estados $\mathbb{S}$, homogênea. Então $P^{(m+n)}_{i,j} = \sum_{k\in\mathbb{S}} P^{(m)}_{i,k} \cdot P^{(n)}_{k,j}$.

Essa equação é conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov. A matriz de transição P é a matriz de transição de probabilidades de estado para um passo no tempo, ou seja, de m para$m$+1. Pode se dizer, de maneira simplista, que as equações de Chapman-Kolmogorov fornecem um método para computar a matriz de transição para n passos no tempo, ou seja, de m para m+1, de m para m+2, ..., de m para $m + n$.

Para Cadeias de Markov cujas probabilidades de transição de estados são constantes em relação ao tempo (*Cadeias Homogêneas*), tem-se:

$$P^{(n)} = P^n.$$

Como $P^{(1)} = P$, pode-se demonstrar por indução que $P^{(n)} = P^n$, de modo que as entradas da matriz P^n são tais que $P^{(n)}_{ij} = P(X_{n+m} = j | X_m = i)$, com $i, j \in \mathbb{S}$ e $m \in \mathbb{T}$. Essa última equação reflete perfeitamente as condições necessárias para o cálculo da probabilidade de trasição do estado i para o estado j em n passos.Segundo ela, para se obter essa probabilidade é preciso que se determine a n-ésima potência da matriz estocástica P, P^n , e em seguida observar o elemento da linha i e coluna j, $p^{(n)}_{ij}$.

No que tange ao conceito de potência da matriz de transição é relevante a definição de regularidade. Uma Cadeia de Markov finita cuja matriz de transição P é *regular* se existir uma potência positiva m tal que todas as entradas da matriz P^m sejam estritamente positivas. Para esse tipo de cadeia, pode-se demonstrar que existe um vetor de probabilidades limite $\pi = [\pi_1 \;\; \pi_2 \;\; ... \;\; \pi_N]$, denominada *distribuição assintótica*, com $\sum \pi_j = 1$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j, \qquad \text{para todo } j = 0, 1, 2, ..., N.$$

Ou em termos de cadeia $\{X_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j > 0, \qquad \text{para todo } j = 0, 1, 2, ..., N.$$

Afim de ilustrar o funcionamento de tal método, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 02

Um ratinho ocupa inicialmente a gaiola 1 e é treinado para mudar de gaiola atravessando uma porta sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolhe qualquer uma das portas incidentes a sua gaiola com igual probabilidade e sem ser afetado por escolhas anteriores. Considere que o alarme ficou programado para tocar a cada minuto:

a) Determine a probabilidade de o ratinho estar na gaiola 3 após ter soado o alarme 13 vezes.

b) Qual a distribuição da proporção de vezes que esse ratinho passou pelas gaiolas, considerando um longo lapso temporal?

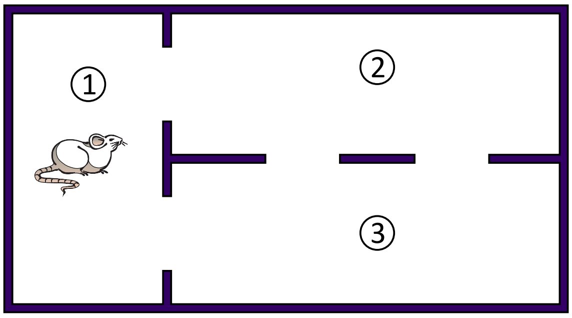

Figura 4: Labirinto

Se P_{ij} denota a probabilidade de o ratinho passar da gaiola i para a gaiola j, com i, j = 1,2,3, então as probabilidades de transições são $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$, $p_{12} = p_{13} = \frac{1}{2}$, $p_{21} = p_{31} = \frac{1}{3}$ e $p_{23} = p_{32} = \frac{2}{3}$. De modo que a matriz de transição é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) O propósito é determinar o elemento $p_{13}^{(13)}$. Para tal, determina-se primeiramente a n-ésima potência da matriz P, P^n, por meio da diagonalização da matriz estocástica P. Sendo assim:

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{2+6(-\frac{1}{3})^n}{8} & \frac{3-3(-\frac{1}{3})^n}{8} & \frac{3-3(-\frac{1}{3})^n}{8} \\ \frac{2-2(-\frac{1}{3})^n}{8} & \frac{3+(-\frac{1}{3})^n+4(-\frac{2}{3})^n}{8} & \frac{3+(-\frac{1}{3})^n-4(-\frac{2}{3})^n}{8} \\ \frac{2-2(-\frac{1}{3})^n}{8} & \frac{3+(-\frac{1}{3})^n-4(-\frac{2}{3})^n}{8} & \frac{3+(-\frac{1}{3})^n+4(-\frac{2}{3})^n}{8} \end{pmatrix}.$$

Como o ratinho inicialmente estava na gaiola 1, sua distribuição inicial é dada por $P_0 = [1 \quad 0 \quad 0]$, as probabilidades do rato encontrar-se na i-ésima gaiola, i = 1, 2, 3, após soar o alarme n vezes é dada por $P(n) = P_0 \cdot P^n$, ou seja,

$$P(n) = \begin{pmatrix} \frac{2+6(-\frac{1}{3})^n}{8} & \frac{3-3(-\frac{1}{3})^n}{8} & \frac{3-3(-\frac{1}{3})^n}{8} \end{pmatrix}.$$

A partir deste resultado, tem-se:

$$p_{13}^{(13)} = \frac{3-3(-\frac{1}{3})^{13}}{8} \cong 0,37500023521.$$

Para responder o item b faz-se necessário o conceito de *Distribuição Invariante*. Para uma cadeia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{T}}$, suponha que π seja uma distribuição satisfazendo as equações

$$\sum_{i\in\mathbb{S}} \pi(i)P_{ij} = \pi(j) \qquad (*)$$

para todo $j \in \mathbb{S}$.

Se a cadeia tem distribuição inicial π, para todo $n \geq 1$ verifica-se que:

$$P(X_n = i) = \pi(i).$$

Observe que no caso em que $\mathbb{S}$ é *finito*, prova-se que toda cadeia de Markov possui pelo menos uma distribuição invariante e a equação $(*)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\pi \cdot P = \pi \qquad\qquad (**)$$

Dessa forma, a distribuição invariante da cadeia de Markov pode ser obtida determinando o vetor π que satisfaz $(**)$ acrescido da condição de que $\sum_{i\in\mathbb{S}} \pi(i) = 1$.

Agora:

b) A proporção de vezes que cada gaiola é visitada, considerando que transcorreu um grande intervalo de tempo, é dada pela distribuição invariante, $\pi = [\pi(1) \;\; \pi(2) \;\; \pi(3)]$. Como essa distribuição é tal que $\pi P = \pi$, ela é obtida resolvendo esse sistema linear acrescentando a condição de que $\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1$. Desta maneira, tem-se:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0,250 & 0,375 & 0,375 \end{pmatrix}$$

Essa distribuição estabelece que a cada 1000 vezes que o alarme toca, o ratinho visita, *em média*:

- a gaiola 1: 250 vezes;
- a gaiola 2: 375 vezes;
- a gaiola 3: também 375 vezes.

Observe que:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{11}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{6} & \frac{11}{18} \end{pmatrix}$$

de modo que esse processo é regular e portanto apresenta distribuição assintótica. Resolvendo o limite $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$, obtém-se,

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Ou seja, a distribuição assintótica é dada por,

$$\pi = \begin{pmatrix} 0,250 & 0,375 & 0,375 \end{pmatrix}$$

que é igual a distribuição invariante.

De modo geral, para Cadeias de Markov regulares, a *distribuição invariante* coincide com a *distribuição assintótica*.

5 Simulações

Consideremos a Cadeia de Markov com espaço de estados $\mathbb{S} = \{1, 2, 3\}$ com a matriz de transição estabelecida no *problema* apresentado na seção anterior:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos:
$|I^1{}_1| = p_{11} = 0$ $|I^1{}_2| = p_{12} = \frac{1}{2}$ $|I^1{}_3| = p_{13} = \frac{1}{2}$
$|I^2{}_1| = p_{21} = \frac{1}{3}$ $|I^2{}_2| = p_{22} = 0$ $|I^2{}_3| = p_{23} = \frac{2}{3}$
$|I^3{}_1| = p_{31} = \frac{1}{3}$ $|I^3{}_2| = p_{32} = \frac{2}{3}$ $|I^3{}_3| = p_{3,3} = 0$

Então podemos fazer a seguinte construção:
$I^1{}_1 = \emptyset$ $I^1{}_2 = [0, \frac{1}{2}]$ $I^1{}_3 = [\frac{1}{2}, 1]$
$I^2{}_1 = [0, \frac{1}{3}]$ $I^2{}_2 = \emptyset$ $I^2{}_3 = [\frac{1}{3}, 1]$
$I^3{}_1 = [0, \frac{1}{3})$ $I^3{}_2 = [\frac{1}{3}, 1)$ $I^3{}_3 = \emptyset$

Determinar qual intervalo ficará aberto ou fechado também não é relevante, pois a medida de um único ponto é zero. Depois, apontamos um estado inicial ou o geramos aleatoriamente através, por exemplo, da medida invariante do processo. Agora o algoritmo age iteradamente da seguinte maneira: estando no estado i vai para a partição i. Em seguida, é gerado o número aleatório *a* segundo uma distribuição uniforme no intervalo [0,1], e então realiza-se a transição para o estado

$$j = \{j: a \in I^i_j\}.$$

Exemplo 03

(IV OIMU)

Várias crianças estão brincando de telefone sem fio. A criança C_0 sussurra três palavras para a criança C_1 , que sussurra o que ouviu para a criança C_2 e assim por diante até uma mensagem chegar à criança C_n . Cada uma das três palavras tem exatamente uma "gêmea"errada (por exemplo, as palavras ração e razão são "gêmeas"pois é muito fácil confundi-las). Cada criança $(i+1)$ tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ouvir corretamente o que a criança i falou, tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a primeira palavra dita pela criança i pela sua "gêmea", $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a segunda palavra e $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a terceira palavra (e portanto nunca troca mais de uma palavra). Note que numa troca a mensagem pode ser acidentalmente corrigida. Calcule a probabilidade de que a criança C_n ouça exatamente a mensagem original.

Sejam as três palavras: a, b, c e suas gêmeas a', b', c'. Identificamos as possíveis combinações de três palavras com os vértices de um cubo da seguinte forma:

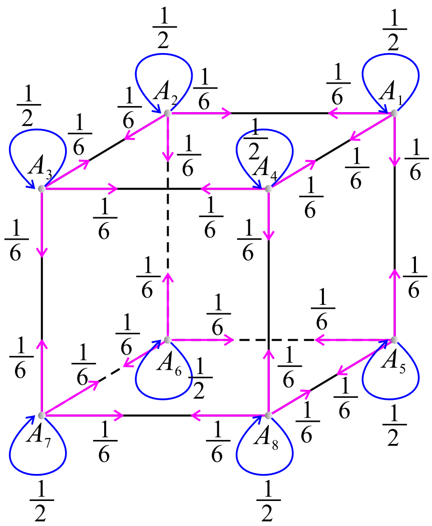

Figura 5: Dinâmica da troca de palavras

$A_1(a, b, c)$ (sequência correta)
$A_2(a', b, c)$
$A_3(a, b', c)$
$A_4(a, b, c')$
$A_5(a, b', c')$
$A_6(a', b, c')$
$A_7(a', b', c)$
$A_8(a', b', c')$

O que nos leva a matriz de transição dada abaixo:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Em casos como esse, a obtenção de matriz P^n é inviável sem o auxílio computacional e sem essa matriz não há como análisar as trasições entre os estados de modo geral. Afim de viabilizar tal procedimento, foram utilizados métodos de diagonalização da matriz estocástica com o auxílio do manipulador algébrico *Maxima*, software lívre de excelente computabilidade simbólico e numérica que possui pacotes com diversas ferramentas relacionadas à áreas afins, como por exemplo estatística. Os resultados obtidos pelas manipulações desse problema podem ser utilizados como ponto de partida na busca de resultados mais práticos e que dependam de predições apartir de cadeias de Markov em que exije-se uma quantidade elevada de passos.

Esse procedimento baseia-se na obtenção de uma matriz diagonal D cuja diagonal principal é constituída dos autovalores de P e de uma matriz não-singular M em que seus vetores colunas são os respectivos autovetores de P. Deste modo tem-se,

$$P = M \cdot D \cdot M^{-1} \Longleftrightarrow P^n = M \cdot D^n \cdot M^{-1}.$$

Por motivos de espaço e por não ser o foco desse trabalho o tratamento delogado das técnicas matemáticas utilizadas, será apresentado abaixo diretamente o resultado desejado.

Como o que se deseja é a probabilidade de que a n-ésima criança ouça exatamente a mensagem original, basta obter o elemento $p_{11}^{(n)}$ da matriz P^n. Após o cálculo da matriz P^n, otem-se

$$p_{11}^{(n)} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot (\frac{1}{3})^n + \frac{3}{8} \cdot (\frac{2}{3})^n.$$

Dessa última equação pode-se, por exemplo, determinar a probabilidade da $20^{\underline{a}}$ criança ouvir a mensagem original é igual a $p_{11}^{(20)} = \frac{290827511}{2324522934} \cong 0,1251127734.$

Um resultado curioso, por refletir o caráter simétrico dessa cadeia, é a distribuição invariante que é dada por:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Por fim, será apresentado um exemplo de Cadeia de Markov não regular na qual não será possível determinar a distribuição limite, mas pode-se determinar a distribuição invariante a qual é de grande importância para se estabelecer o comportamento médio da cadeia.

Exemplo 04

Um ratinho é colocado dentro de uma caixa dividida em seis compartimentos interligados como mostra a figura abaixo. Inicialmente o o ratinho ocupa gaiola A_1 e é treinado para mudar de gaiola atravessando um túnel sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolhe qualquer um dos túneis incidentes à sua gaiola com igual probabilidade e sem ser afetado por escolhas anteriores. Cacule a probabilidade de que após o alarme soar n vezes o ratinho ocupe a gaiola A_2. Qual o comportamento médio de visitação desse ratinho nas gaiolas?

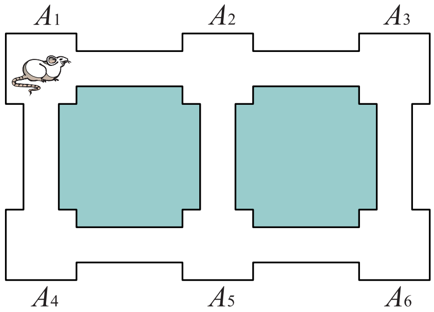

Figura 6: Labirinto do ratinho

Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{T}} = \{1,2,3,4,5,6\}$ o conjunto de estados, onde $A_i = i$, com $i = 1,2,3,4,5,6$, representa a i - ésima gaiola. De acordo com o problema, cada vez que o alarme soa o ratinho escolhe qualquer um dos túneis incidentes à sua gaiola sem ser afetado por escolhas anteriores, sendo assim, é verdade que

$P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}\ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$, e o processo é markoviano.

Denotando por $P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P_{ij}$, temos que $P_{12} = P_{14} = P_{32} = P_{36} = P_{41} = P_{45} = P_{63} = P_{65} = \frac{1}{2}$, $P_{21} = P_{23} = P_{25} = P_{52} = P_{54} = P_{56} = \frac{1}{3}$ e as demais probabilidades de transições são 0. O que conduz a matriz de transição a seguir:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Após usar o mesmo procedimento do exemplo 3 para calcular a P^n e usando a distribuição inicial $P_0 = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ e adotando $P(n) = P_0 \cdot P^n$, obtém-se,

$$P^T(n) = \begin{pmatrix} \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{7} + 2^{-n-2} + \frac{3}{28}(\frac{1}{6})^n\right) \\ \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{3}{14} + \frac{3}{14}(\frac{1}{6})^n\right) \\ \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{7} - 2^{-n-2} + \frac{3}{28}(\frac{1}{6})^n\right) \\ \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{7} + 2^{-n-2} - \frac{3}{28}(\frac{1}{6})^n\right) \\ \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{3}{14} - \frac{3}{14}(\frac{1}{6})^n\right) \\ \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{7} - 2^{-n-2} - \frac{3}{28}(\frac{1}{6})^n\right) \end{pmatrix}.$$

Aqui, $P^T(n)$ é a transposta do vetor $P(n)$.

O elemento p_{12}^n da matriz P^n estabelece que após o alarme soar n vezes o ratinho está na gaiola A_2, ou seja:

$p_{12}^{(n)} = \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{3}{14} + \frac{3}{14}(\frac{1}{6})^n\right)$.

Observe que para qualquer n par, o vetor $P^T(n)$ fica

$$P^T(2k) = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{7} + 2^{-2k-2} + \frac{3}{28}(\frac{1}{6})^{2k}\right) \\ 0 \\ 2\left(\frac{1}{7} - 2^{-2k-2} + \frac{3}{28}(\frac{1}{6})^{2k}\right) \\ 0 \\ 2\left(\frac{3}{14} - \frac{3}{14}(\frac{1}{6})^{2k}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E no caso de n ímpar, tem-se o vetor $P^T(n)$ da seguinte forma

$$P^T(2k+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\left(\frac{3}{14} + \frac{3}{14}\left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1}\right) \\ 0 \\ 2\left(\frac{1}{7} + 2^{-2k-3} - \frac{3}{28}\left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1}\right) \\ 0 \\ 2\left(\frac{1}{7} - 2^{-2k-3} - \frac{3}{28}\left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1}\right) \end{pmatrix}.$$

O mesmo ocorrendo para todos os vetores linhas da matriz P^n quando tomamos n par ou ímpar. Deste modo, não existe uma potência m tal que cada uma das entradas de P^m sejam todas estritamente positivas, portanto essa cadeia não é regular, de modo que não há como determinar a distribuição assintótica, $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$.

Diante disso, como podemos prever o comportamento desse ratinho a longo prazo? Pode-se, mesmo para cadeias não regulares, determinar a distribuição invariante, essa distribuição fornece o comportamento médio de visitações do ratinho dentro das gaiolas, resultado muito expressivo para quem quer estabelecer o comportamento médio de um animal dentro das condições do problema apresentado.

Calculando a distribuição invariante dessa cadeia, obtém-se:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

6 Conclusão

O uso de softwares para simulações tem gerado resultados interessantes em diversas áreas do conhecimento. No contexto de processos aleatórios isto não deixa de ser verdade. Com o surgimento de computadores cada vez mais rápidos tem sido possível obter resultados satisfatórios em ambientes estocásticos onde antes do advento computacional era impraticável devido as dificuldades algébbricas.

REFERÊNCIAS

Anton, Howard, **Álgebra Linear Aplicada**, trad Claus Ivo Doering. 8. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2001.

Ferrari, P.A. e Galves, J.A., **Acoplamento em Processos Estocásticos, Notas para um minicurso apresentado na XIII Escuela Venezolana de Matematicas**, 2000.

Hoel, P. G., Port, S. C. e Stone, C. J. **Introduction to stochastic processes**, Waveland Press,1986.

Júnior, V.V., **Concentração de Massa da Medida Invariante de uma Classe de Caderas de Markov. Dissertação de Mestrado**, 2006.

Mello, M. P. ; dos Santos, J. P. O. e Murari, I. T.C. **Introdução à análise combinatória** , Editora Ciência Moderna, 1a Edição - 2008.

Norris, J.R., **Markov Chains**, Cambridge University Press,1998.

RIPLEY, B.D., **Stochastic Simulation**, Wiley-Interscience,1ª edição, 2006.

Ross, S. M., **A first course in probability**, Prentice Hall; 8a edição , 2009.

Ross, S. M., **Simulation**, Academic Press, 4a edição, 2006.

S.H. Ross, **Stochastic Processes**, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1996.