

Uso de Cópulas em Controle Estatístico Multivariado

Francini P. Ferreira¹, Márcio L. L. Viola²

1. Estudante de IC da Universidade Federal de São Carlos- UFSCar; *franferreira@hotmail.com

2. Docente do Depto.de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Palavras Chave: *Controle de Qualidade, Cópulas, Estatística Multivariada*

Introdução

O controle estatístico do processo possibilita padronizar o processo produtivo para que seja realizado de forma eficaz, aumentando a qualidade, desde que haja menos variabilidade e não ocorram desperdícios na produção. Uma das ferramentas utilizadas são os gráficos de controle, cujo objetivo é verificar se o processo está sob controle, ou seja, isento de causas especiais.

Em diversas situações é necessário o monitoramento simultâneo de duas ou mais características de um processo, ou seja, um controle multivariado. Para o caso em que há duas variáveis, pode-se utilizar o gráfico de controle T^2 de Hotelling (2) para o monitoramento do vetor de médias do processo, o qual é obtido supondo normalidade de tais variáveis, pressuposto este que pode não ser realístico.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo o uso de cópulas (1) para a obtenção de gráficos de controle multivariado, considerando o caso em que as variáveis não são normais. Além disso, será estudado o impacto do uso do gráfico de controle T^2 de Hotelling para dados normais quando, de fato, não são normais.

Resultados e Discussão

De maneira simplificada, cópula é uma função que modela a dependência entre duas ou mais variáveis aleatórias. De acordo com o Teorema de Sklar, a cópula é uma função que vincula uma função de distribuição conjunta às suas funções de distribuição marginal.

Dentre todas, a classe das cópulas Arquimedianas (1) merece ser destacada por ter grande aplicação na modelagem de diversos problemas. As cópulas de Gumbel, Clayton e Frank são exemplos de cópulas Arquimedianas.

Em particular, a cópula Frank apresenta o mesmo tipo de dependência na cauda inferior e superior. Assim, a cópula de independência (1) é obtida quando seu parâmetro α tender a zero e os limites inferiores e superiores de Frechét são obtidos quando $\alpha \rightarrow -\infty$ e $\alpha \rightarrow \infty$, respectivamente.

Com relação ao controle multivariado do processo, os limites de controle do gráfico T^2 de Hotelling são calculados supondo distribuição normal dos dados. Assim, quando não há normalidade, não se conhece a distribuição da estatística de teste relacionada a esse gráfico.

Dessa forma, considerando que o vetor de médias de um processo segue uma cópula Frank, foram geradas 500 amostras de tamanho 100 dessa cópula fixando alguns valores de α e, para cada amostra, foi calculado o valor da estatística T^2 assumindo que o processo esteja sob controle.

Construiu-se então a distribuição empírica da estatística T^2 , como mostra a Figura 1, e utilizando alguns quantis, foi

possível obter os limites superiores. Tais valores foram comparados com aqueles obtidos quando existe normalidade nos dados. Vale ressaltar que por se tratar de uma elipse de controle, o limite inferior de controle é sempre igual a 0.

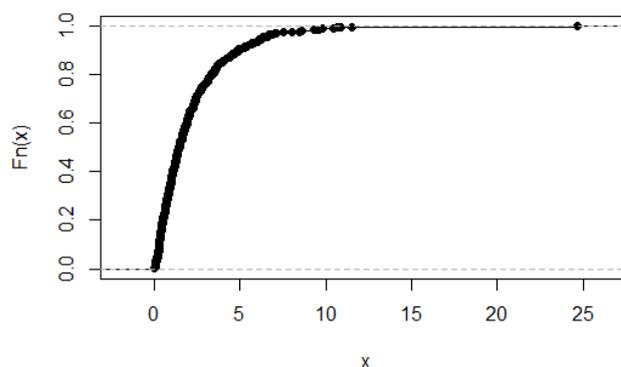


Figura 1. Distribuição empírica de T^2 para $\alpha=0.1$.

Tabela 1. Limite Superior de Controle.

Confiança	Normal	Cópula Frank		
		$\alpha=-20$	$\alpha=0.1$	$\alpha=50$
90%	4.596	9.719	9.441	9.159
95%	5.979	12.869	11.246	12.078
99%	9.192	18.082	17.129	20.026

Pela Tabela 1 observa-se que a região de controle, com base na suposição de normalidade, é menor do que a obtida via cópula Frank.

Conclusões

Conclui-se que a utilização do gráfico de controle T^2 de Hotelling quando os dados não apresentam normalidade pode indicar que o processo está fora de controle quando na verdade ele não está. Assim, algumas pausas na produção para investigação no processo serão realizadas de forma desnecessária, o que acarretará em menor produtividade esperada e maiores gastos.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pela ajuda financeira e ao meu orientador pela sua paciência e disposição.

(1) NELSEN, R. *An Introduction to Copulas*. USA, Springer, 2006.

(2) MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*. 4ª ed., LTC, 2004.