Teoremas de Sylow e aplicações

Hermano D. Mariani[1], Humberto L. Talpo[2]

1. Estudante de IC da Universidade Federal de São Carlos - UFSCar; * hdmariani@gmail.com
2. Professor Doutor do Departamento de Matemática – DM, UFSCar , São Carlos/SP

Palavras Chave: *Álgebra, Sylow, Grupos.*

Introdução

O estudo da Teoria de Grupos, que no seu início era o estudo das simetrias, se confunde com a própria origem do que conhecemos hoje como Álgebra abstrata. O estudo da Teoria de Grupos trouxe grandes avanços, não apenas para a Álgebra Abstrata, mas também para a Matemática de um modo geral, com inúmeras contribuições para o avanço paralelo de outras áreas da Matemática e de outras ciências como Teorias Atômicas na Química e Física Quântica. Um importante resultado na Teoria de Grupos foi o famoso Teorema de Lagrange que nos diz que dado um grupo finito *G* e um subgrupo *H* qualquer de *G*, a ordem de *H*, isto é, o números de elementos de *H*, divide a ordem de *G*. Esse Teorema proporcionou inúmeros bons resultados nessa área, mas também gerou uma importante questão: A recíproca é verdadeira? Isto é, dado um grupo finito *G* qualquer, de ordem *n*, para cada divisor de *n* existe um subgrupo *H* de *G* correspondente a esse divisor? Veremos que essa recíproca, em geral, é falsa. No entanto, os Teoremas de Sylow nos garantem, para alguns casos, a existência de subgrupos de certas ordens. No desenvolvimento da Teoria de Grupos, os Teoremas de Sylow foram extremamente importantes por nos permitirem, em algumas situações, classificar grupos finitos. Dessa forma, contribuíram para que pudéssemos mapear estruturas algébricas e, com isso, avançar nesta importante área da Matemática. Neste trabalho enunciaremos e demonstraremos os Teoremas de Sylow e citaremos algumas importantes aplicações.

Resultados e Discussão

Começamos esta seção enunciando os Teoremas de Sylow.

$(1^o\,\textit{Teorema de Sylow})$ *Seja* G *um grupo finito de ordem* $|G| = p^n m$, *onde* $p \nmid m$, *e* $n > 1$. *Então*:

(I) G *possui um subgrupo de ordem* p^i *para cada* $1 \leq i \leq n$

(II) *Todo subgrupo* H *de ordem* p^i *de* G *é um subgrupo normal de um subgrupo de ordem* p^{i+1}

$(2^o\,\textit{Teorema de Sylow})$ *Sejam* P_1 *e* P_2 $p-$*subgrupos de Sylow de um grupo finito* G. *Então* P_1 *e* P_2 *são subgrupos conjugados de* G.

$(3^o\,\textit{Teorema de Sylow})$ *Se* G *é um grupo finito e* p *divide* $|G|$, *então o número de* $p-$*subgrupos de Sylow é congruente a* 1 *módulo* p, *e* p *divide* $|G|$.

No desenvolvimento do trabalho, demonstraremos os três teoremas acima usando alguns outros resultados previamente demonstrados que envolvem desde teoria de conjuntos à noções de combinatória no decorrer da prova.

Conclusões

Com os teoremas acima foi possível proceder com a classificação de grupos finitos, fato de extrema importância e relevância para o desenvolvimento da Matemática e de outras ciências, além claro de fortalecer e relacionar vários conceitos matemáticos, fortalecendo minha formação.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq, através do programa PIBIC-UFSCar, pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste estudo.

[1] Garcia, A., Lequain, Y. - *Elementos de Álgebra* – Projeto Euclides – IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
[2] Gonçalves, Adilson – *Introdução à Álgebra* – Projeto Euclides – IMPA, Rio de Janeiro, 1999.
[3] Herstein, I. N. - *Tópicos em Álgebra* – Editora Polígono – São Paulo, 1970.
[4] Fraleigh, John B. - *A first Course in Abstract Algebra,* 7th edition - Pearson, 2002.
[5] Dummit, David S., Foote Richard M. - *Abstract Algebra*, 3rd edition – Wiley, 2003.