Formalismo Tensorial da Relatividade Geral Aplicado na Equação de Euler-Lagrange: Grandezas Conservadas.

***Paola T. Seidel[1], Luís A. Cabral[2]**

1. Estudante de IC da Universidade Federal do Tocantins - UFT; *paola.seidel@gmail.com
2. Professor do curso de Física – UFT – Araguaína/TO. cabral@mail.uft.edu.br

Palavras Chave: *geodésica, símbolo de Christoffel e tensor de Killing.*

Introdução

Algumas formulações da Mecânica Clássica, como por exemplo o príncipio de Hamilton e as equações de Euler-Lagrange, podem ser trabalhadas dentro do formalismo tensorial da Relatividade Geral. Teoria essa que completa um século de existência no presente ano. A partir da equação de Euler-Lagrange podemos encontrar a geodésica de uma partícula relativística. Dada uma certa métrica do espaço-tempo, a existência de simetrias na geodésica, indica grandezas que são conservadas na mesma. Ademais, a partir da comparação pertinente entre a geodésica e a equação de Euler-Lagrange é possível encontrar as conexões métricas (símbolo de Christoffel) envolvidas [1]. Esse objeto de certa forma nos permite encontrar o comportamento das grandezas conservadas não-triviais associadas ao espaço-tempo. Isso porque, é possível provar que toda grandeza conservada apresenta um tensor de Killing associado [2]. Esse objeto tensorial é solução de isometrias, que envolvem soma de derivadas covariante do tensor de Killing resultando em zero. Sabemos que a derivada covariante depende do símbolo de Christoffel, logo é nítido que a expressão do tensor de Killing depende desse objeto, caracterizando a grandeza conservada. Sendo assim, o objetivo do trabalho é contribuir para a elucidação da relação que existe entre os conceitos aqui enunciados, permitindo ainda menicionar a ligação com um dos famosos resultados da Relatividade Geral, a precessão do periélio de Mercúrio.

Resultados e Discussão

A igualdade entre a equação da geodésica e a equação de Euler-Lagrange é válida quando $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}$, logo [1]:

$$\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = 0 = \frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) \quad (1)$$

Trabalhando a equação de Euler-Lagrange com base na métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2 + \left(-1 + \frac{2m}{r}\right) dt^2 \quad (2)$$

podemos, encontrar os símbolos de Christoffel presentes na geodésica desse espaço-tempo. Para $a = 3 = \phi$ temos:

$$\ddot{x}^3 + \Gamma^3_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = \ddot{x}^3 + \Gamma^3_{\alpha 1}\dot{x}^\alpha\dot{x}^1 + \Gamma^3_{\alpha 2}\dot{x}^\alpha\dot{x}^2 + \Gamma^3_{\alpha 3}\dot{x}^\alpha\dot{x}^3 + \Gamma^3_{\alpha 4}\dot{x}^\alpha\dot{x}^4 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^3} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3}\right) = -\frac{d}{d\lambda}\left(r^2 sen^2\theta \dot{x}^3\right) \quad (4)$$

$$= 2\frac{cos\theta}{sen\theta}\dot{x}^2\dot{x}^3 + \frac{2}{r}\dot{x}^3\dot{x}^1 + \ddot{x}^3 \quad (5)$$

Comparando (3) e (5) encontramos: $\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$ e $\Gamma^3_{23} = \frac{cos\theta}{sen\theta}$.

Observando a equação (4) podemos notar que se trata de uma simetria. As simetrias são valiosas, pois auxiliam a encontrar um caminho mais fácil para obter as incógnitas de equações diferenciais.

Trabalhamos a geodésica considerando o movimento da partícula no plano equatorial, $\theta = \pi/2$, e encontramos uma aproximação do resultado para (r), $u = r^{-1}$, sendo ele:

$$u \simeq \frac{m}{h^2}\{1 + ecos[\phi(1-\varepsilon)]\} \quad (6)$$

Esse resultado releva que a órbita da partícula não é uma elipse fechada, sendo assim está intimamente ligado a precessão do periélio de Mercúrio [1].

Outra curiosidade entorno do tema, é que as simetrias presentes na geodésica revelam grandezas que são conservadas. Toda grandeza não-trivial é conservada quando apresenta um tensor de Killing.

Para comprovar o pressuposto, trabalhamos o parênteses de Poisson de uma grandeza (*Q*) qualquer com a sua hamiltoniana (*H*) [2]. A condição de conservação é satisfeita quando o tensor envolvido for um tensor de Killing, pois seu comportamento está ligado a isometria, (e.g. $\nabla_{(\gamma}K_{\mu)} = \nabla_\gamma K_\mu + \nabla_\mu K_\gamma = 0$), que é igual a zero. Logo: $\{Q,H\} = -p^\mu p^\gamma\left(\partial_\gamma K_\mu - K_\alpha \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\right) = -p^\mu p^\gamma(\nabla_\gamma K_\mu) = 0.$

Nesse sentido, como o tensor de Killing é solução da isometria, para encontrarmos as componentes desse tensor dependemos das componentes do símbolo de Christoffel. Isso porque a isometria envolve derivadas covariante que, por sua vez, dependem deste símbolo. Assim, podemos afirmar que o tensor de Killing é uma ferramenta padrão para descrição da simetria.

Conclusões

Nesse trabalho abordamos uma série de observações interessantes ligadas a Relatividade Geral, a precessão do periélio de Mercúrio foi um exemplo. Constatamos a utilidade em trabalhar com a equação de Euler-Lagrange (EL) dentro do formalismo tensorial. Ao compará-la com a geodésica obtemos as componentes do símbolo de Christoffel, relevantes a obtenção do tensor de Killing. Ademais, notamos a acuidade em operar as equações da geodésica a partir do formato de EL, graças as simetrias. Enfim, foi possível notar que as grandezas conservadas estão ligadas com os conceitos trabalhados.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq – Brasil. Agradeço a Universidade Federal do Tocantins – UFT pelo suporte técnico.

[1] D'INVERNO, Ray. *Introducing Einstein's Relativity*. United States: Oxford University Press, New York, 1999.

[2] BARBOSA, D. *Uma Introdução aos Aspectos Vetoriais e Tensoriais de Grandezas Físicas e Matemáticas.* Monografia – Curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* em Educação Matemática, UFT. Araguaína, 2013.