Introdução às Curvas Algébricas Complexas.

Anderson F. Viveiros[1], Alexandre P. Barreto[2].

1. Estudante de Matemática da Universidade Federal de São Carlos - UFSCar; * andersonfelipeviveiros@gmail.com
2. Prof. Dr. do Departamento de Matemática, UFSCar, São Carlos – SP.

Palavras Chave: *Complexos, Polinômios, Superfícies.*

Introdução

Curvas algébricas complexas são os zeros de um ou mais polinômios em duas variáveis complexas. Essas curvas não são subconjuntos compactos de $\mathbb{C}^2$. Para resolver este problema, precisamos do conceito de curvas algébricas projetivas.

As curvas algébricas projetivas são subconjuntos compactos do plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2$ que é construído acrescentando "pontos no infinito" a $\mathbb{C}^2$. Mais precisamente, $\mathbb{P}^2$ é o conjunto das classes de equivalência

$$\mathbb{P}^2 = (\mathbb{C}^3 - \{0\})/\sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência

$$(x, y, z) \sim (a, b, c) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 : (x, y, z) = \lambda(a, b, c).$$

Identificamos $\mathbb{C}^2$ com o subconjunto de $\mathbb{P}^2$

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : z = 1\},$$

onde $[x, y, z]$ representa a classe de equivalência de (x, y, z). Dessa forma, os pontos $[x, y, z] \in \mathbb{P}^2$ com $z = 0$ são considerados "pontos no infinito" de $\mathbb{C}^2$.

Uma curva projetiva complexa em $\mathbb{P}^2$ são os zeros de um ou mais polinômios ***homogêneos*** em três variáveis, isto é, polinômios $P(x, y, z)$ satisfazendo

$$P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z), \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

para algum $d \in \mathbb{N}$.

Podemos enxergar as curvas algébricas complexas (que são subconjuntos de $\mathbb{C}^2$) como sendo subconjuntos de $\mathbb{P}^2$. Isso é feito por meio da homogeneização de polinômios, transformando as curvas algébricas complexas em $\mathbb{C}^2$ em curvas projetivas complexas em $\mathbb{P}^2$.

Os objetivos principais deste trabalho foram classificar topologicamente as curvas projetivas complexas e desenvolver um estudo introdutório sobre sua estrutura complexa.

Resultados e Discussão

As curvas projetivas complexas não-singulares são, topologicamente, esferas com alças. Mais precisamente, uma curva projetiva complexa não-singular de grau d é, topologicamente, uma esfera com g alças (i.e. toro, bitoro, tritoro, ...), onde g é dado pela fórmula do grau-gênero (ou "grau-genus"):

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Assim, em particular, curvas projetivas complexas não-singulares são superfícies. Mais do que isso, essas superfícies admitem uma estrutura de *superfícies de Riemann.* Isso significa dizer que faz sentido falar sobre funções holomorfas e podemos fazer análise sobre essas superfícies.

Conclusões

Os principais resultados demonstrados nesse trabalho foram:

Teorema 1 (Fórmula do Grau-Gênero): Uma curva projetiva complexa não-singular de grau d em $\mathbb{P}^2$ é topologicamente uma esfera com g alças onde o gênero (ou *genus*) satisfaz a *fórmula do grau-gênero*

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Teorema 2: Se $\mathcal{C}$ é uma curva algébrica complexa em $\mathbb{C}^2$ definida por um polinômio $P(x, y)$ então $\mathcal{C} - Sing(\mathcal{C})$ admite um atlas holomorfo. Em outras palavras, $\mathcal{C} - Sing(\mathcal{C})$ é uma superfície de Riemann.

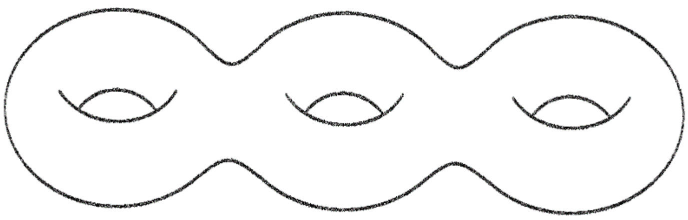

Figura 1. Exemplo de um tritoro (ou esfera com três alças).

[1] Kirwan F.: Complex Algebraic Curves, London Mathematical Society, 1992.
[2] Fulton, W.: *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, Benjamin-Cummings Publishing Co., 1969.