

Alguns resultados de Análise que exigem a compacidade

Douglas R. Calegari¹, Francisco Braun².

1. Estudante de IC da Universidade Federal de São Carlos – UFSCar; *doug_calegari@hotmail.com

2. Professor do Depto. De Matemática da Universidade Federal de São Carlos – DM/UFSCar

Palavras Chave: *Análise, Compacidade, Continuidade.*

Introdução

Conjuntos compactos têm propriedades bastante úteis em várias áreas, particularmente em Análise. Por exemplo, são conjuntos fechados e limitados.

No estudo de funções contínuas, a compacidade tem um papel muito importante. Por exemplo, funções reais contínuas definidas em compactos possuem máximos e mínimos.

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns resultados que exigem a compacidade como hipótese, como por exemplo, o resultado sobre funções contínuas acima mencionadas e apresentar contra exemplos para cada uma das proposições ao retirarmos a compacidade.

Resultados e Discussão

Definiremos compacidade e apresentaremos três caracterizações para essa propriedade. Com isto, construiremos ferramentas para trabalhar nos seguintes tópicos:

1- Toda função contínua definida num subconjunto compacto da reta é uniformemente contínua. Mostraremos esse resultado e provaremos que a função $1/x$ definida em $(0,1)$ é um contraexemplo para ele, quando não assumimos a compacidade do domínio da função.

2- Toda função contínua de A em B , com A compacto, tem inversa contínua. Demonstraremos este resultado e apresentaremos um elegante contraexemplo quando a compacidade não estiver presente.

3- Toda função contínua em um subconjunto compacto da reta é limitada e assume máximo e mínimo. Demonstraremos isto e apresentaremos exemplos de funções não limitadas e de funções limitadas que não possuem máximos e mínimos.

Conclusões

Vários teoremas de Cálculo são consequências dos resultados demonstrados neste trabalho. Por exemplo, o importantíssimo Teorema do Valor Médio é produto do fato de que funções contínuas em compactos possuem máximos e mínimos.

Dessa forma ilustramos um pouco a frase de um eminente matemático: “Não existe Matemática sem compacidade”.

Agradecimentos

Agradecemos ao apoio financeiro do CNPq através da bolsa PICME.