Curvas e Superfícies no Espaço de Lorentz-Minkowski

Ivo Terek Couto[1], Alexandre Lymberopoulos[2]

1. Estudante de IC do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, IME-USP; *terek@ime.usp.br
2. Professor Doutor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, IME-USP.

Palavras Chave: *curvas, superfícies, Lorentz*

Introdução

O intuito deste projeto é desenvolver a teoria clássica de curvas e superfícies no espaço de Lorentz-Minkowski L^3, baseando-se na teoria já desenvolvida no espaço Euclideano R^3, atentando para o que é afetado ou não pela mudança de assinatura do tensor métrico.

Fazemos a investigação de quais resultados Euclideanos podem ser recuperados mediante alguma adaptação, e quais resultados estão definitivamente comprometidos.

Utilizamos sotfwares como o Wolfram Mathematica para plotar exemplos concretos e fazer comparações.

Resultados e Discussão

Desenvolvemos a teoria do Triedro de Frenet-Serret para curvas de todos os tipos causais no L^3, e com isto caracterizamos as hélices de tipo espaço e tempo cuja direção normal seja não-degenerada (isto é, que o vetor normal não seja de tipo luz).

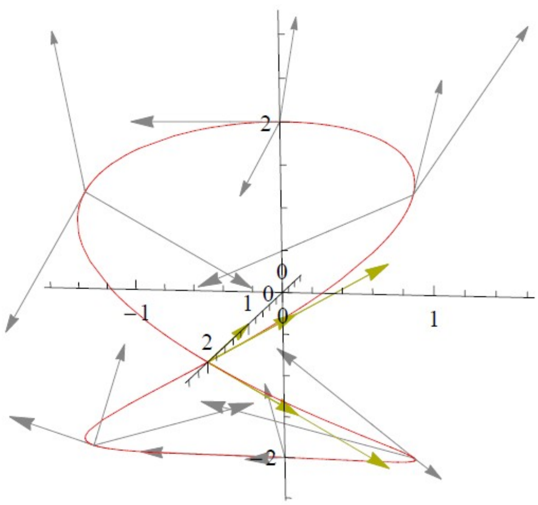

Figura 1. O Triedro de Frenet-Serret no L^3

A interpretação para a curvatura Gaussiana de superfícies de tipo tempo é a mesma interpretação dada no R^3, porém a interpretação para superfícies de tipo espaço é invertida.

Em seguida, estudamos o problema da diagonalização do mapa de Weingarten de superfícies no L^3 (problema não existente em ambiente Euclideano) e classificamos também todas as superfícies não-degeneradas e totalmente umbílicas neste ambiente.

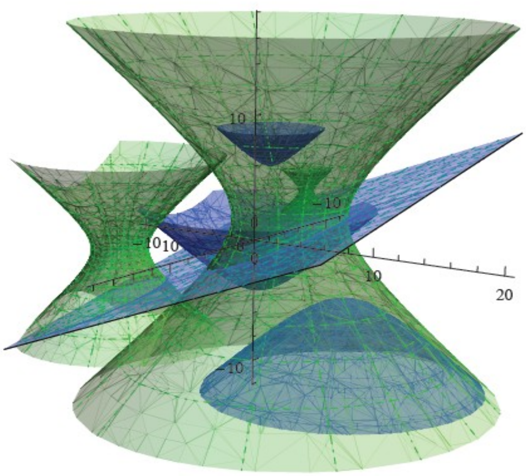

Figura 2. Esferas Lorentzianas, planos, e planos hiperbólicos – as superfícies totalmente umbílicas do L^3.

Por fim, estabelecemos uma versão do Theorema Egregium de Gauss no L^3 para superfícies não-degeneradas, utilizando o Método do Referencial Móvel de Cartan, via formas diferenciais, adaptado para o L^3.

Conclusões

As duas geometrias comparadas, apesar de muito distintas em diversos aspectos, coexistem e podem ser utilizadas para obter resultados uma sobre a outra. A Geometria Lorentziana é uma área de pesquisa ativa, com muitos problemas motivados pela Física e com interesse e contexto geométricos próprios.

Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP pelo apoio financeiro.

[1] R. Lopez, Differential Geometry of Curves and Surfacesin Lorentz-Minkowski Space. Mini-curso ministrado no IME-USP, 2008, http://arxiv.org/pdf/0810.3351.pdf.

[2] B. O'Neill, Elementary Differential Geometry, Elsevier, 2006.

[3] T. Weinstein, An Introduction to Lorentz Surfaces. Walter De Gruyter Expositions in Mathematics, 1934.

[4] M. P. Do Carmo, Differential Forms andApplications. Springer-Verlag , 1991.