ESTUDO DA AÇÃO DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS SOBRE VIGAS PELA TEORIA DE TIMOSHENKO

Lilian A. Olivera[1], Alexandre Celestino L. Almeida[2].

1. Estudante de IC da Universidade Federal de São João Del Rei - UFSJ; *lilianagdadeoliveira@gmail.com
2. Orientador do Projeto de Iniciação Científica. Depto.de Física e Matemática, UFSJ/CAP, Ouro Branco/MG

Palavras Chave: *Vibrações, Vigas, Frequência natural.*

Introdução

O estudo sobre vibrações foi realizado nesta iniciação a fim de avaliar o comportamento dinâmico presente nas vigas quando submetidas a esforços. Para tanto, o entendimento sobre vibrações bem como frequências naturais e modo de vibrar foram de suma importância. Parte dessa avaliação foi realizada por meio das teorias de Stephen Timoshenko e Euler-Bernoulli.

Desse modo, foi necessário rever os conceitos estruturais para dar subsídios aplicados à teoria das vigas estudadas durante a obtenção das equações para os modelos abordados. A fim de desenvolver e apresentar um estudo na área de engenharia estrutural que vislumbrasse entendimento dinâmico das estruturas civis, a partir de métodos analíticos como a transformada de Laplace e método da separação de variáveis para equações diferenciais parciais.

Resultados e Discussão

A análise do comportamento das vigas sob a ação das vibrações pode ser feita através de equações diferenciais ordinárias, que são utilizadas para a situação em que existam sistemas vibratórios com número de graus de liberdade finito, ou através de sistemas de parâmetros distribuídos que estão na forma de equações diferenciais parciais com condições iniciais e de contorno. Para cada classificação da viga, quanto ao seu tipo de apoio, há uma condição de contorno específica que nos permite determinar a equação característica bem como as formas dos modos de vibrar da estrutura (Tabela 1).

Tabela 1. Equação característica e forma dos modos de vibrar para viga quanto aos tipos de apoio (BALACHANDRAN e MAGRAB, 2011).

Caso	Condições de contorno		Limites	Equação característica e forma dos modos de vibrar
1	Engastada	$\eta = 0$	$a_{2n} \to \infty$ $b_{2n} \to \infty$	$\cos(\Omega_n)\cosh(\Omega_n) - 1 = 0$
	Engastada	$\eta = l$	$a_{2n} \to \infty$ $b_{2n} \to \infty$	$w_n(\eta) = -\frac{S(\Omega_n)}{T(\Omega_n)} T(\Omega_n \eta) + S(\Omega_n \eta)$
2	Engastada	$\eta = 0$	$a_{2n} \to \infty$ $b_{2n} \to \infty$	$\cos(\Omega_n)\, senh(\Omega_n) - \mathrm{sen}(\Omega_n)\, cosh(\Omega_n) = 0$
	Articulada	$\eta = l$	$a_{2n} \to \infty$ $b_{2n} \to 0$	$w_n(\eta) = -\frac{S(\Omega_n)}{T(\Omega_n)} T(\Omega_n \eta) + S(\Omega_n \eta)$
3	Engastada	$\eta = 0$	$a_{2n} \to \infty$ $b_{2n} \to \infty$	$\cos(\Omega_n)\cosh(\Omega_n) + 1 = 0$
	Livre	$\eta = l$	$a_{2n} \to \infty$ $b_{2n} \to \infty$	$w_n(\eta) = -\frac{T(\Omega_n)}{Q(\Omega_n)} T(\Omega_n \eta) + S(\Omega_n \eta)$
4	Livre	$\eta = 0$	$a_{2n} \to \infty$ $b_{2n} \to \infty$	$\cos(\Omega_n)\cosh(\Omega_n) - 1 = 0$
	Livre	$\eta = l$	$a_{2n} \to \infty$ $b_{2n} \to \infty$	$w_n(\eta) = -\frac{S(\Omega_n)}{R(\Omega_n)} Q(\Omega_n \eta) + R(\Omega_n \eta)$

A partir da equação característica, obtêm-se os valores das frequências naturais que o elemento possui. Além das frequências naturais, a partir da equação governante geral da estrutura, é possível determinar para cada tipo de viga, no que tange os tipos de apoios da mesma, os esforços internos (momento fletor e de torção, esforço cortante e esforço normal).

O projeto teve como resultado as demonstrações e entendimentos da equação geral da viga (1), bem como as soluções para as frequências naturais e modos de vibrar, além das equações características para essas soluções. Além disso, os efeitos de rigidez, ocasionados pela mola (2)(3), e elementos de inércia (4)(5) fixados numa posição entre as extremidades da estrutura também foram estudados e discutidos. Manipulações algébricas e ferramentas numéricas foram importantes em todo o processo estudado.

$$EI(x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\right) - K_f w(x,t) + \rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t) \qquad (1)$$

$$K_f w(x,t) \to \frac{K_s}{L} w(x,t)\delta(x - L_1) \qquad (2)$$

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{K_s}{L} w(x,t)\delta(x - L_1) + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (3)$$

$$\rho \to \rho + \frac{M_S}{AL}\delta(x - L_1) \qquad (4)$$

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[A\rho + \frac{M_S}{L}\delta(x - L_1)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (5)$$

Conclusões

A análise quanto aos efeitos que as vibrações desencadeiam nas vigas é realizada com a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibrar dessas estruturas depois de excitadas. Uma vez que as vigas são submetidas à ação de variedade de forças dinâmicas, as frequências dessas forças são capazes de excitar essas estruturas em uma ou mais de suas frequências naturais, fazendo com que as mesmas vibrem. Desse modo, o conhecimento das frequências naturais da estrutura é de suma importância. Para tanto, esses resultados quando não obtidos por métodos numéricos podem ser determinados através de métodos analíticos que, a partir das equações que regem o movimento em vigas e suas respectivas condições de contorno, propiciam as frequências naturais, como respostas, através da solução da transformada da função.

Agradecimentos

Agradeço ao Programa Institucional de Iniciação Científica (PIIC) por me disponibilizar essa oportunidade de ampliar meus conhecimentos, bem como ao meu orientador Dr. Alexandre Celestino que muito me ensinou. Agradeço também ao professor Dr. Alexandre da Silva Galvão pelos ensinamentos. Por fim, agradeço à Universidade Federal de São João Del Rei que foi o marco inicial para que tudo isso se tornasse possível.