

ANÁLISE INTERVALAR DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DO CIRCUITO DE CHUA

Lucas G. Nardo^{1,3*}, Erivelton G. Nepomuceno^{1,2,3}

1. GCOM – Grupo de Controle e Modelagem

2. Departamento de Engenharia Elétrica UFSJ

3. Universidade Federal de São João del-Rei, Praça Frei Orlando, 170, Centro, 36307-352, São João del-Rei, MG, Brasil

Resumo:

Teoria do Caos propõe que certos sistemas possuem sensibilidade às condições iniciais. O circuito de Chua é um circuito eletrônico capaz de gerar oscilações periódicas ou caóticas de acordo com parâmetros do circuito. Para tanto, existem três equações matemáticas que descrevem o seu comportamento dinâmico e este, por sua vez, pode ser obtido via computação numérica. Porém, o cálculo computacional ocorre em um espaço que não é de Banach, ou seja, não se pode ter condições suficientes para convergência de seqüências de Cauchy. Além disso, diversas pesquisas revelam suas inquietações acerca dos resultados mostrados pelo computador, apresentando discrepâncias na forma de arredondamento da máquina. A análise intervalar surge como uma ferramenta para corrigir o problema, criando um intervalo que contém o resultado. Neste trabalho, três estratégias foram tomadas para a criação do intervalo, sendo a primeira as operações aritméticas e expansão de Taylor, a segunda pseudo-órbitas, e por fim, a aritmética intervalar por meio do toolbox IntLab™.

Palavras-chave: Teoria do Caos, Análise Intervalar, Circuito de Chua.

Apoio financeiro: Agência brasileira CNPq e Universidade Federal de São João del-Rei.

Trabalho selecionado para a JNIC pela instituição: UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei.

Introdução:

Sistemas dinâmicos caóticos têm recebido uma grande atenção recentemente, gerando trabalhos nas mais diversas áreas: meteorológica, química e, por fim, eletrônica.

O circuito de Chua [1], mostrado pela Figura 1, é um circuito eletrônico capaz de exibir oscilações, periódicas ou caóticas, de acordo com a variação de um parâmetro do circuito. Ele é constituído por componentes lineares, à exceção do diodo de Chua, que é um dipolo

com a característica linear por partes. Esse diodo possui resistência negativa, sendo o elemento que confere energia ao sistema, permitindo, assim, manter o circuito oscilando autonomamente.

As equações 1 descrevem o Circuito de Chua

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{v_{C2} - v_{C1}}{R} - i_d$$

$$C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{v_{C1} - v_{C2}}{R} - i_L \quad (1)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_{C2},$$

sendo que v_{Cj} é a tensão sobre o capacitor C_j , para $j = 1; 2$, i_L a corrente que passa pelo indutor e i_d a corrente do diodo de Chua, o qual é regido pelas equações 2

$$i_d = \begin{cases} m_0 v_1 + B_p(m_0 - m_1) & v_1 < -B_p \\ m_1 v_1 & |v_1| < B_p \\ m_0 v_1 + B_p(m_1 - m_0) & v_1 > B_p \end{cases} \quad (2)$$

em que B_p , m_0 e m_1 são o ponto de quebra e as inclinações, respectivamente, da função linear por partes.

Uma forma de simular o circuito é de maneira computacional, porém muitos trabalhos levantam a dúvida quanto à confiabilidade destes resultados, visto que, conforme Nepomuceno [2], o espaço \mathbb{D} , que abrange os números codificados no computador não respeita as propriedades elementares e, também, este espaço não é idêntico ao espaço \mathbb{R} , em outras palavras, caso um resultado real não esteja contido em \mathbb{D} , este será arredondado seguindo as normas de ponto flutuante IEEE 754-2008 [3].

Uma vez que há a inevitável presença de erros nos computadores atuais, uma alternativa que vem ganhando espaço é a análise intervalar. A análise intervalar é uma técnica computacional recente e extremamente rigorosa, que cria um limite a partir dos erros - como os oriundos de aproximação e acumulação de erros de arredondamento. Portanto, esta técnica lida com dados numéricos na forma de intervalos compactos com o objetivo de codificar os erros computacionais no próprio intervalo.

É dito um intervalo, uma função $f(x)$, que contém números reais $x \in \mathbb{R}$, tal que $X = [A, B]$, sendo X um intervalo variável.

À medida que o intervalo cresce, os valores dos erros aumentam na mesma proporção, ou seja, a precisão do resultado diminui. É importante, então, utilizar um método que deixe o intervalo o menor possível. Neste trabalho serão investigados três métodos: operação aritmética e expansão de Taylor [2], pseudo-órbitas [4] e a ferramenta computacional IntLab™ [5].

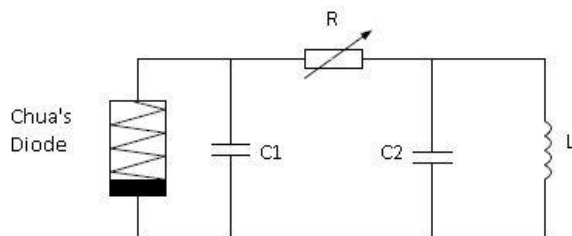


Figura 1 – Circuito de Chua.

Metodologia:

Dos três métodos analisados nesse trabalho foi considerada a seguinte configuração do circuito de Chua: $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 100 \text{ nF}$, $L = 19 \text{ mH}$, o potenciômetro R ajustado para 1800Ω , $m_0 = -0,37 \text{ mS}$, $m_1 = -0,68 \text{ mS}$ e $B_p = 1,1 \text{ V}$, com condições iniciais iguais a: $v_{C1} = -0,5 \text{ V}$, $v_{C2} = -0,2 \text{ V}$ e $i_L = 0 \text{ A}$. Desse modo é obtido um atrator duplo, como visto na Figura 2.

A partir do método intervalar da toolbox Intlab 9, todos os componentes do circuito foram considerados ideais. Foi declarado o intervalo, ditando os valores mínimos e superiores, apenas nas condições iniciais do circuito.

Para o segundo método foi considerado que uma pseudo-órbita é uma aproximação da

órbita verdadeira, além de haver diversas pseudo-órbitas representáveis pelo computador e que, devido às limitações impostas pela norma IEEE de ponto flutuante, um computador não consegue representar a resposta verdadeira do sistema.

Dessa maneira, foram realizadas duas simulações do circuito de Chua, mudando apenas a forma que uma equação é vista pelo computador, mas mantendo a sua identidade matemática. Como visto pelas equações 3 e 4:

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{v_{C2} - v_{C1}}{R} - i_d \quad (3)$$

$$C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{v_{C2} - v_{C1}}{R} - i_d \quad (4)$$

Desse modo é calculado o erro e/ou o intervalo baseando na equação 5:

$$\delta = \frac{|x_1 - x_2|}{2} \quad (5),$$

sendo δ a média das distâncias das duas pseudo-órbitas e x_i sendo o valor instantâneo da órbita i calculada, como por exemplo, a curva do diodo de Chua.

Para o cálculo do intervalo usando conceito de expansão de Taylor e de operações aritméticas feitas pelo computador, foi necessário a determinação de três componentes, as quais mudam a cada iteração: δ , β e γ .

O componente δ indica o valor a ser acrescentado ao resultado encontrado - utilizando a computação por ponto flutuante - para se obter um intervalo em que possa haver o verdadeiro resultado, ou seja, o intervalo da iteração n seria $[Xn - \delta, Xn + \delta]$, sendo Xn o resultado dado pela máquina na n^{th} iteração. O componente β é calculado fazendo a aproximação de uma determinada equação, usando o método proposto por Taylor, multiplicado pelo componente δ . Para saber qual será a equação que rege, é necessário pegar as três equações do circuito eletrônico de Chua e discretizá-las utilizando algum método conhecido.

Como a cada operação aritmética o resultado é aproximado, isto deve ser quantizado para a determinação do intervalo, originando então o componente γ .

O método escolhido para discretizar o sistema para o último método foi o Euler, pois o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) apresenta um elevado número de operações aritméticas, influenciando, assim, na componente γ , gerando então um intervalo grande, o que não é desejado. Para os dois primeiros métodos, a solução do sistema foi obtida a partir de RK4.

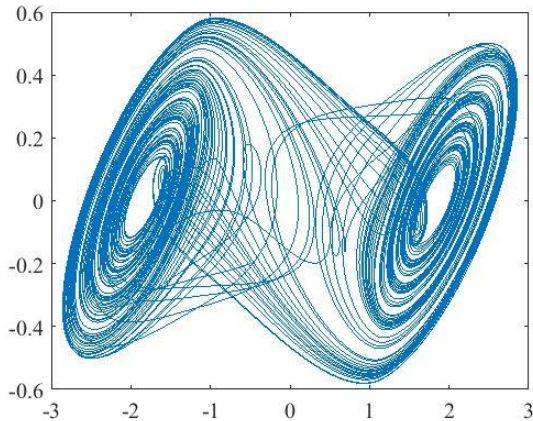


Figura 2 – Atrator Dupla-volta.

Resultados e Discussão:

O método de expansão de Taylor e operações aritméticas obteve o pior desempenho de todas as alternativas testadas neste trabalho, conforme Tabela 1.

Tabela 1: As primeiras iterações obtidas para o método de Nepomuceno

	Tensão no Diodo de Chua	Tamanho do Intervalo
n	X_n	
0	-0.5000000000000000	$5,55111512 \times 10^{-17}$
1	-0.5000017333333333	$3,63842289 \times 10^{-12}$
2	-0.500003466669750	$1,09148245 \times 10^{-11}$
3	-0.500005200009249	$2,54676280 \times 10^{-11}$
4	-0.500006933351831	$5,45732348 \times 10^{-11}$
5	-0.500008666697496	$1,12784226 \times 10^{-10}$
6	-0.500010400046245	$2,29205987 \times 10^{-10}$
7	-0.500012133398076	$4,62048621 \times 10^{-10}$
8	-0.500013866752990	$9,27732779 \times 10^{-10}$
9	-0.500015600110987	$1,85909865 \times 10^{-09}$
10	-0.500017333472067	$3,72182529 \times 10^{-09}$

Observando a Tabela 1, é possível ver que os valores da tensão estão contidos nos seus respectivos intervalos. Porém, com apenas 10 iterações a distância do intervalo caiu para 9 casas decimais, uma característica não desejável para o intervalo, pois este vai perdendo a sua precisão. Com apenas 40 iterações, a diferença do intervalo está nos números inteiros, e, desse modo, para o Circuito de Chua essa aritmética não é viável.

Foi utilizada a ferramenta IntlabTM, mantendo as mesmas condições supracitadas, com exceção do passo de integração que neste caso é igual a 10^{-6} (para o último caso o valor era de 10^{-10} a fim de contornar a diferença de método de discretização utilizado).

A toolbox foi eficiente para poucas iterações. À medida que o número de iterações vai aumentando, a distância entre os valores máximo e mínimo do intervalo também cresce chegando a um ponto que não é possível tirar nenhuma conclusão. A Figura 3 indica a curva no diodo de Chua até 450 iterações. É possível observar o aumento do intervalo, até o ponto em que ele está super dimensionado.

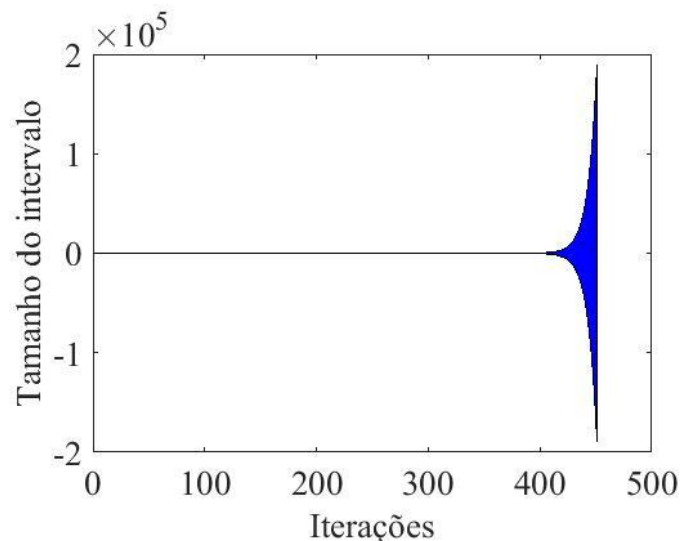


Figura 3: Intervalo usando o toolbox IntlabTM.

A distância entre duas pseudo-órbitas, retiradas calculando o valor da tensão no diodo linear por partes, matematicamente equivalentes é mostrado pela Figura 4.

Este último método, além de ser relativamente simples de implementar em uma rotina de programação, apresentou o melhor resultado. A Figura 4 indica que o erro no início da simulação é por volta de 16 casas decimais. Conforme a simulação ocorre, os erros vão crescendo de maneira gradativa.

A partir desses dados, pode-se tirar uma série de conclusões. A mais pertinente se trata em que ponto deve-se interromper a simulação, como por exemplo, com apenas 23 ms (23000 iterações) de simulação, o erro apresentado entre as duas órbitas está na parte inteira do número. Concluindo, a partir de um certo número de iterações não se pode afirmar se a órbita verdadeira está próxima de uma pseudo-órbita.

Conclusões:

Foram apresentados três métodos que permitiram analisar o circuito de Chua de modo intervalar. O método por expansão de Taylor e o uso da ferramenta computacional Intlab™ não foram eficazes, uma vez que o intervalo ficava, a cada iteração, mais extenso. Isso acontece, já que estas técnicas calculam o intervalo baseando no valor do erro no computador a cada iteração. Por outro lado, utilizando o conceito de pseudo-órbitas foi possível obter um maior número de iterações sem perder, ainda, as informações do sistema. Essa técnica vem sendo bastante discutida recentemente, mostrando resultados questionadores. No trabalho de Silva [6] em que há a investigação do circuito de Chua comparando a curva do diodo não linear pela norma IEEE-754 e aritmética intervalar, os resultados são discrepantes, pois mostram novos pontos de periodicidade em seu comportamento utilizando a última análise.

Referências Bibliográficas:

[1] CHUA, Leon O. et al. A universal circuit for studying and generating chaos. I. Routes to chaos. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, v. 40, n. 10, p. 732-744, 1993.

[2] NEPOMUCENO, Erivelton Geraldo. Convergence of recursive functions on computers. **The Journal of Engineering**, v. 1, n. 1, 2014.

[3] Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) (2008). 754-2008 – IEEE standard for floating-point arithmetic. **IEEE**.

[4] HAMMEL, Stephen M.; YORKE, James A.; GREBOGI, Celso. Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits? **Journal of Complexity**, v. 3, n. 2, p. 136-145, 1987.

[5] RUMP, Siegfried M. INTLAB—interval laboratory. In: **Developments in reliable computing**. Springer Netherlands, 1999. p. 77-104.

[6] SILVA, Melanie Rodrigues et al. Simulation of Chua's Circuit by Means of Interval Analysis. **arXiv preprint arXiv:1612.01060**, 2016.

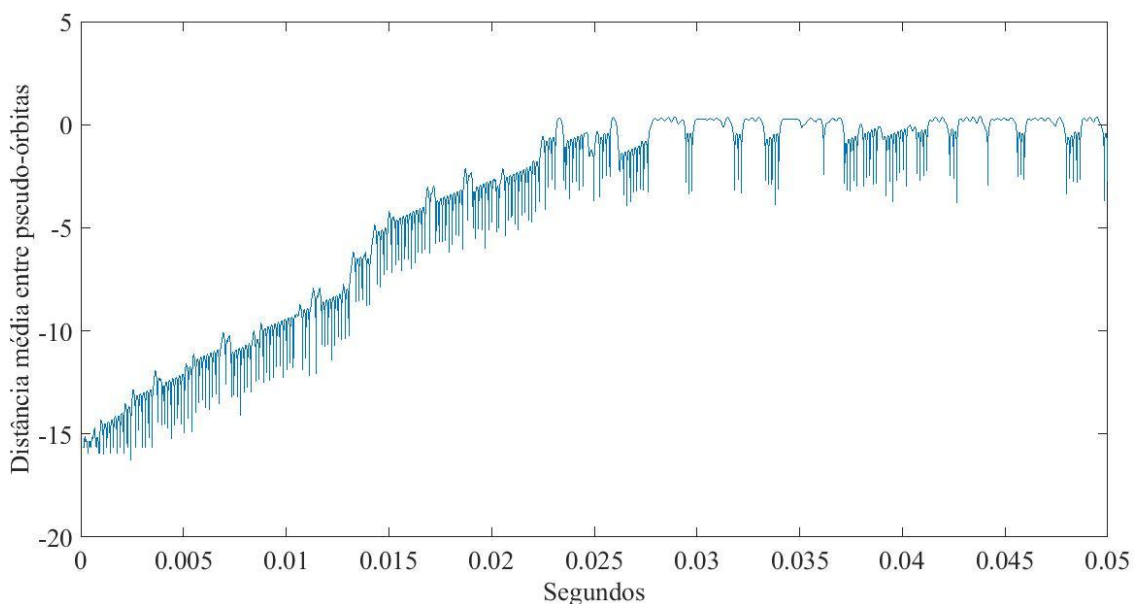


Figura 4: Intervalo obtido para duas pseudo-órbitas.