

RESOLVENDO A EQUAÇÃO DE FOURIER-FICK EM COORDENADAS ELIPSOIDAISPedro A. L. e Lopes¹, Luciana C. de Paula².

1. Discente do curso de Engenharia Química, UESC.

2. Docente da UESC, e orientadora deste projeto.

Resumo:

Para a produção do chocolate, a amêndoa de cacau passa por processos específicos, dentre eles, a secagem, atualmente realizada por meio de barcaças horizontais. Com este mecanismo não é possível estabelecer um controle preciso de temperatura e umidade. Dentro da proposta e desenvolvimento do secador solar vertical, este controle se torna possível e necessário para garantir melhor qualidade da amêndoa.

Neste sentido, este trabalho visa obter a distribuição de temperatura na amêndoa de cacau, através da sua modelagem. Primeiramente foi realizado um estudo analítico do problema, e a avaliação da geometria que melhor representa a amêndoa. Depois, foram realizados cálculos de distribuição de temperatura em regime permanente para as geometrias escolhidas.

Numa primeira aproximação, a amêndoa foi ajustada a um paralelepípedo, posteriormente a um cilindro e observou-se a distribuição de temperaturas. A geometria elipsoidal ajusta-se melhor à amêndoa, porém possui tratamento mais complexo.

Palavras-chave: Amêndoas; Cacau; Temperatura.

Apoio financeiro: CNPq.

Trabalho selecionado para a JNIC pela instituição: UESC.

Introdução:

O cacau comercial é resultante de um conjunto de operações unitárias pelas quais passam as amêndoas do fruto do cacauzeiro. Essas operações têm como finalidade modificar as características das amêndoas frescas que são indispensáveis para o aproveitamento posterior do produto. Uma das principais operações de processamento do cacau é a secagem, que consiste na exposição da massa de amêndoas ao sol (secagem natural) ou a uma corrente de ar quente (secagem artificial). Uma secagem adequada influencia na qualidade dos grãos e, conseqüentemente, no produto final. O processo de secagem envolve, simultaneamente, transferência de calor e

massa (umidade) entre a amêndoa e o ar de secagem.

Estudar a transferência de calor e distribuição de temperatura nas amêndoas demanda conhecimento acerca de equações diferenciais ordinárias e parciais, bem como das diferenças e transformações entre os sistemas de coordenadas. Além disso, as distribuições de temperatura podem ser estudadas em um regime permanente (em que a temperatura não varia no tempo) ou em regime transiente (em que a temperatura varia no tempo e no espaço).

A equação diferencial que rege os fenômenos térmicos no interior de sólidos isotrópicos é a equação geral do calor, dada pela seguinte expressão:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}.$$

Nesta equação, o termo q''' representa a taxa de calor gerado no volume de controle por unidade de volume, k representa a condutividade térmica do material onde ocorre a condução de calor e α representa a difusividade térmica do meio. A função (Ψ) sobre a qual as derivadas são aplicadas é a função temperatura, dependente de um vetor espacial e uma coordenada temporal. O vetor espacial, assim como a forma do laplaciano, depende do sistema de coordenadas que é adotado para descrever o volume de controle.

Metodologia:

O problema de determinar a distribuição de temperaturas dentro da amêndoa de cacau (volume de controle) foi abordado por meio da resolução da equação de Laplace em dois sistemas de coordenadas diferentes: retangular e cilíndrico. Esta equação provém da redução da equação geral do calor para um regime estacionário sem fonte de calor, e é dada pela expressão:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) = 0.$$

Com relação à geometria, foi tomada uma amêndoa arbitrária e registrada suas medidas, de acordo com a Figura 1.

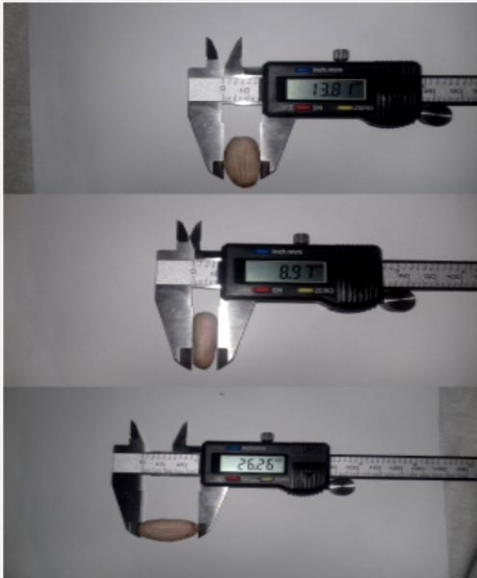


Figura 1: Medição dos eixos da amêndoa.

A partir dessa medição, foram definidos dois volumes de controle (paralelepípedo e cilindro) de modo que a amêndoa estivesse totalmente contida em seu interior. Também foi realizado o ajuste da amêndoa a um elipsoide, de modo que os eixos principais do elipsoide tivessem as mesmas medidas dos eixos da amêndoa. A equação de Laplace foi resolvida para cada uma das geometrias considerando um problema em condições estacionárias. Em uma das faces da amêndoa foi adotada uma temperatura T_0 e em todas as outras temperatura nula.

O problema de coordenadas retangulares foi tratado através da aproximação da amêndoa a um prisma de dimensões (a, b, c) nas direções, respectivas, (x, y, z) sendo $a = 13,81mm$, $b = 26,26mm$ e $c = 8,97mm$. Todas as superfícies do prisma foram tomadas a $0^\circ C$, com exceção da superfície $z = c$ que está a uma temperatura T_0 .

A distribuição de temperaturas, neste caso é encontrada resolvendo a equação:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0,$$

e aplicando as condições de contorno.

Para coordenadas cilíndricas, considera-se o seguinte problema: um cilindro de raio a e altura h , com $a = 13,81mm$ e $h = 26,26mm$. As bases, inferior e superior, estão nos planos $z = 0$ e $z = h$, respectivamente. A temperatura na face lateral e na base inferior é nula, e na base superior é igual a T_0 .

A distribuição de temperaturas na amêndoa, aproximada por um cilindro, é encontrada resolvendo a equação (em coordenadas cilíndricas):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0,$$

e aplicando as condições de contorno.

Resultados e Discussão:

A partir da resolução das equações diferenciais, foram obtidas as distribuições de temperatura no interior da amêndoa, para as duas geometrias. Na geometria retangular, a distribuição encontrada foi:

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{16T_0}{(2n+1)(2m+1)\pi^2} \times \\ \times \operatorname{sen} \left[\frac{(2n+1)\pi x}{a} \right] \operatorname{sen} \left[\frac{(2m+1)\pi y}{b} \right] \times \\ \times \frac{\operatorname{senh} \left[\pi z \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2}} \right]}{\operatorname{senh} \left[\pi c \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2}} \right]}$$

Essa é uma função de três variáveis, impossibilitando uma avaliação explícita de seu gráfico. Para contornar esta questão foi feita a análise de “fatias” do prisma, fixando uma das variáveis. Procedendo desta forma, foi avaliado o comportamento da temperatura em três secções transversais do sólido. Além disso, considerou-se a temperatura inicial $T_0 = 50^\circ C$.

Com a altura do prisma fixa na metade, isto é, fixando z em $4,48mm$ segue o gráfico da distribuição de temperaturas:

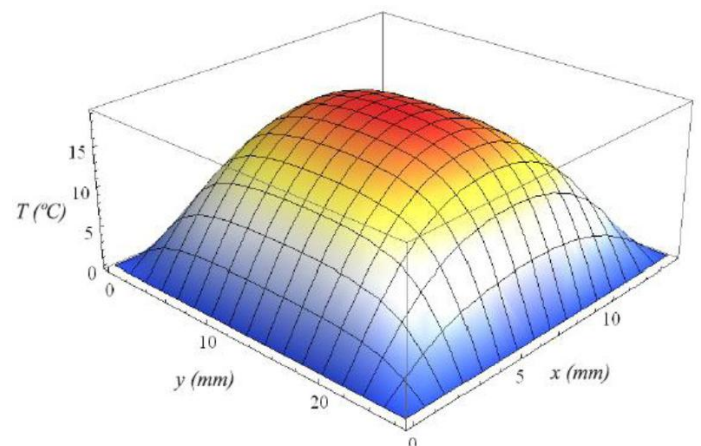


Figura 2: Distribuição de temperatura com altura fixa.

É possível perceber que as mais elevadas temperaturas se concentram no centro do plano, que também é o centro do prisma, representando o centro da amêndoa.

Com a largura fixa na metade ($y = 13,13mm$), segue a distribuição:

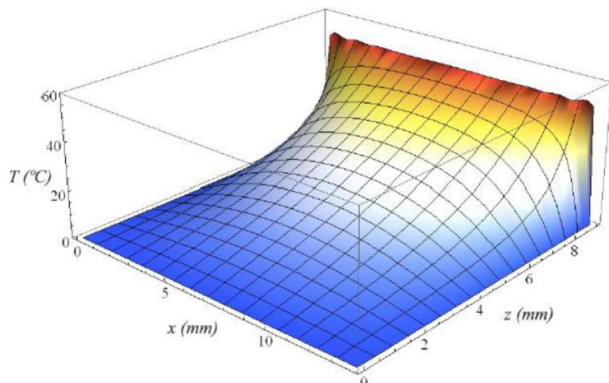


Figura 3: Distribuição de temperatura com largura fixa.

Aqui é observado que a temperatura cai com a diminuição da altura, é nula para $x = 0$ e $x = 13,81mm$, e apresenta valores maiores para valores de x intermediários.

Com o comprimento fixo na metade ($x = 6,90mm$), vem:

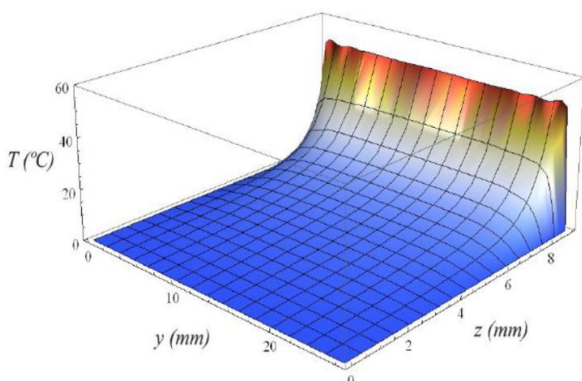


Figura 4: Distribuição de temperatura com comprimento fixo.

A temperatura permanece mais elevada próximo à fonte de calor, topo do prisma, decaindo à medida em que se aproxima da base ($z = 0$). Para os valores máximo ou mínimo de y a temperatura é nula, e para valores intermediários de y as temperaturas apresentam maior valor.

Na geometria cilíndrica a distribuição de temperaturas é dada pela função a seguir:

$$\Psi(r, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2T_0 J_0\left(\frac{\alpha_{0n} r}{a}\right) \sinh\left(\frac{\alpha_{0n} z}{a}\right)}{\alpha_{0n} J_1(\alpha_{0n}) \sinh\left(\frac{\alpha_{0n} h}{a}\right)}$$

Essa é uma função de duas variáveis,

devido à simetria do problema. Assim, é possível obter o gráfico de Ψ para a análise. Como o volume de controle já foi definido anteriormente, resta apenas definir um parâmetro. Toma-se $T_0 = 50^\circ C$, a temperatura da face superior do cilindro ($z = 26,26mm$). Com estes parâmetros a seguinte distribuição é obtida:

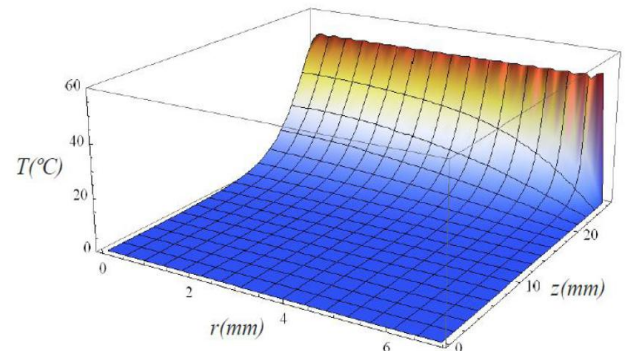


Figura 5: Distribuição de temperatura com o raio e altura.

Uma das condições impostas ao problema é que a temperatura na casca cilíndrica é igual a zero. Esta situação pode ser observada, quando se faz $r = 13,81mm$ na expressão de $\Psi(r, z)$. A figura acima mostra um decréscimo da temperatura conforme as coordenadas se aproximam da borda do cilindro. Por outro lado, próximo ao centro, apresenta temperaturas maiores, em especial, próximo ao topo.

Por fim, foi feito o ajuste da amêndoa a um elipsóide. Como observado através da Figura 6 foi possível identificar os cortes do volume de controle em cada um dos planos coordenados (xy , yz e xz), assim como as medidas dos eixos principais.

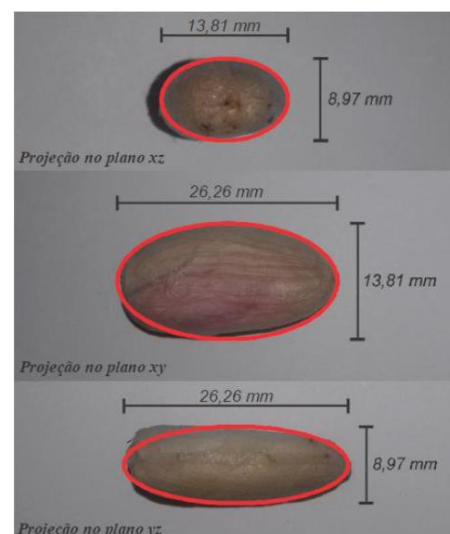


Figura 6: Cortes do ajuste da amêndoa ao elipsóide.

As formas geradas a partir do corte do volume de controle são elipses, que se ajustam bem à própria amêndoa. É possível então perceber que a geometria elipsoidal representa melhor a amêndoa de cacau.

CATTANI, Mauro Sérgio Dorsa. **Elementos de Física Matemática: Equações Diferenciais Parciais e Cálculo das Variações**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

Conclusões:

A geometria elipsoidal se mostra mais apropriada na descrição de uma amêndoa. Apesar disso, a complexidade desta geometria é refletida nas dificuldades de cálculos algébricos e estão sendo trabalhadas. Foram propostas geometrias mais simples (paralelepípedo e cilindro), de forma que as distribuições de temperaturas em regime permanente pudessem ser obtidas.

As distribuições em regime transiente, sob condições iniciais diferentes, estão sendo trabalhadas, para a determinação da relação entre temperatura e umidade na amêndoa de cacau.

Referências bibliográficas

BRONSON, R. **Moderna Introdução às Equações Diferenciais**. Coleção Schaum. 1992.

ZILL, D.G; CULLEN, M.R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

FALEIROS, Antônio Cândido. **Aritmética, Álgebra e Cálculo com o Mathematica**. São José dos Campos: Editora Edgard Blücher Ltda, 1997.

SANTOS, Everton Costa. **Modelagem de um secador de grãos vertical**. Ilhéus: Universidade Estadual de Santa Cruz, 2015.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**: Volume 3. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1998. 4 v.

CRAIZER, Marcos; TAVARES, Geovan. **Cálculo Integral a Várias Variáveis**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Puc-Rio, 2003.

BASSALO, José Maria Filardo;