1.01.03 – Matemática / Geometria e Topologia

ESTIMATIVAS INFERIORES PARA O FUNCIONAL DE HEINTZE-KARCHER

Arthur Wayne Basilio Brasileiro de Oliveira[1], Feliciano Marcílio Aguiar Vitório[2]
1. Estudante de Matemática da Universidade Federal de Alagoas
2. Professor orientador IM-UFAL

Resumo:

O trabalho a seguir busca obter estimativas para o funcional de Heintze-Karcher, a saber,

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{H}ds$$

Onde Ω é um domínio limitado no espaço tridimensional que tem fronteira $\partial\Omega$ suave, H é a curvatura média de $\partial\Omega$ e |Ω| denota o volume de Ω. Note que, se a curvatura média H é constante, então estimativas inferiores do funcional de HK são dadas facilmente pela desigualdade isoperimétrica e, assim seu mínimo é atingido pelo natural 3. Heintze e Karcher, em 1979, foram capazes para mostrar que três é exatamente a cota ótima para todo Ω com H positiva.

Este funcional que denotamos por F(Ω) é invariante por mudanças conformes, tal como o funcional de Wilmore, neste foi observado que obstruções topológicas produzem alterações das cotas ótimas como foi provado recentemente por Fernando Marques e André Neves em um dos trabalhos mais importantes da área. O objetivo central deste projeto de pesquisa é observar que podemos em casos simples fazer o mesmo para o funcional F(Ω).

Autorização legal: Esta pesquisa faz parte do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade Federal de Alagoas, sendo submetido e aprovado durante o perído de 2015-2016.

Palavras-chave: Funcional de Heintze-Karcher; Curvatura média; Estimativas inferiores.

Apoio financeiro: Universidade Federal de Alagoas.

Trabalho selecionado para a JNIC pela instituição: UFAL.

Introdução:

Seja c(s), 0 ≤ s ≤ l, uma curva fechada plana convexa, sempre podemos parametrizá-la de forma que a norma do vetor velocidade tem norma um, dizemos assim que a curva está parametrizada pelo comprimento do arco. Seja k(s) a curvatura da curva c, um teorema central da geometria diferencial das curvas planas afirma que a integral de k ao longo de c é igual a 2π (isto pode ser visto como uma aplicação elementar do teorema de Gauss-Bonnet). Se k é positiva, então 1/k está bem definida para todo s, mais ainda usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para a função 1=√k √(1/k) obtemos que a curvatura inversa total é limitada inferiormente por L/2π, onde L é o quadrado comprimento de c. Agora a desigualdade isoperimétrica no plano, L≥4πA, onde A é a area da região limitada por c, nos fornece que a cota ótima para o análogo para o funcional F(Ω) para curvas planas é 2.

No artigo intitulado "A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds" Heintze e Karcher provam que F(Ω) ≥ n, onde n é a dimensão de Ω (o problema não se restringe a dimensão 3)., com igualdade se Ω é a bola euclidiana. A sua prova usa essencialmente uma estimativa para o volume de Ω em termos da curvatura média total de $\partial\Omega$, o que se segue é então um argumento parecido com o caso bidimensional. Parece ser este o ponto final para a passagem por uma obstrução ao número de alças que a superfície tem e é esse ponto que queremos atacar nesta pesquisa**.**

Metodologia:

A metodologia na presente pesquisa intitulada “Estimativas inferiores para o funcional de Heintze-Karcher” será a de abordar os problemas propostos em cinco etapas:

- Consulta bibliográfica atualizada sobre o assunto;
- Análise de casos particulares;
- Especulações sobre os possíveis resultados;
- Concretização dos resultados;
- Dedução dos teoremas obtidos.

Em relação à estratégia de ação, foi usada a participação do estudante em cursos básicos, de leitura, seminários e eventos científicos.

Resultados e Discussão:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio convexo compacto com limite suave $\partial\Omega = \Sigma$. Suponha que Σ é a curva parametrizada pelo comprimento do arco s e $k(s) > 0$ é a curvatura de Σ. É um resultado clássico que:

$$\int_\Sigma \frac{ds}{k(s)} \geq 2|\Omega|$$

Onde $|\Omega|$ é a área de Ω. Além disso, a equação ocorre se, e somente se, Σ é um círculo. Vale a pena salientar que a expressão anterior é uma linda consequência da desigualdade isoperimétrica $|\Sigma|^2 \geq 4\pi|\Omega|$. De Fato,

$$4\pi|\Omega| \leq |\Sigma|^2 = \left(\int_\Sigma ds\right)^2 \leq \int_\Sigma k(s)ds \int \frac{ds}{k(s)}$$

$$= 2\pi \int_\Sigma \frac{ds}{k(s)}$$

Obs: $\int_\Sigma k(s)ds = 2\pi I$ (I é chamado índice de rotação de uma curva simples e fechada e é ±1 onde o sinal depende da orientação da curva).

No nosso caso I = 1, logo $\int_\Sigma k(s)ds = 2\pi$.

Teorema 1.1: Seja σ uma curva simples suave. Se T $\mathbb{R}^3$ é um tubo regular em torno de σ com curvatura média positiva em todos os seus pontos, então

$$Q_{HK}(T) = \frac{1}{vol(\Omega)} \int_T \frac{1}{H} dT \geq 4$$

Onde Ω é o domínio limitado e determinado por T. Além disso, a equação ocorre se, e somente se, σ é um segmento de reta.

Prova: A prova do teorema consiste em supor uma curva fechada simples e suave parametrizada pelo comprimento do arco com um tubo em volta com largura 2a com sua parametrização formal, e a partir dela calcular os elementos de área e de volume, utilizando para isso conceitos de Geometria diferencial, bem como o triedro de Frenet, Primeira e segunda forma fundamental, para assim calcular a curvatura média, usando o traço da matriz resultante. Assim usaremos a desigualdade triangular para calcular e estimar a integral da curvatura média, chegando ao nosso Funcional HK. Concluindo então que sua cota inferior é 4, e a desigualdade acontece se e somente se o tubo é um cilindro circular reto, ou seja, estamos tratando de um segmento de reta, dando fim a prova do teorema.

Conclusões:

Ao fim desta pesquisa, decorrido os estudos pré-estabelecidos, foi trabalhado o funcional de Heintze-karcher, a fim de manipular de forma a obter uma cota inferior para o quociente $Q_{HK}(T)$ onde T é um tubo regular em volta de uma curva em $\mathbb{R}^3$, com solução para casos particulares, a saber, como consta no resultado do teorema 1.1, tema central desta pesquisa, obtendo como resultado sendo sempre maior ou igual a quatro. E ainda, estudando quando ocorre a igualdade obtém-se um cilindro circular reto.

Referências bibliográficas

A. Gray, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC Press, Boca Raton, 2003.

E. Heintze; H. Karcher, A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11 (1978), no. 4, 451-470

H. Hotelling, Tubes and spheres in n-space and a class of statistical problems, Amer. J. Math. 61 (1939), 440-460.

M. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

O'Neill, B. Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. xiii+468 pp.