

Estudo de Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas

Sávio Silva Santana¹, Vinicius Augusto Takahashi Arakawa²,

1. Estudante de IC do Curso de Bacharelado em Matemática, da UESC

2. DCET—UESC, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas / Orientador.

Resumo:

O projeto introduziu um exemplo clássico de Sistemas Dinâmicos, que é a Transformação de Gauss. O estudo desse sistema dinâmico é motivado pelo interesse em abordarmos a teoria de frações contínuas enfatizando seus aspectos de aproximação e dinâmica, cujo estudo não é abordado em nenhum curso da graduação ou mesmo de algumas pós graduações. A teoria de frações contínuas é um dos mais belos assuntos da Matemática elementar, em especial a Aritmética, sendo ainda hoje tema de pesquisa científica. Foi realizada a abordagem inicial de todas as propriedades principais dessa teoria demonstrando sua importância.

Palavras-chave: Transformada de Gauss; Frações Contínuas; Sistemas Dinâmicos.

Apoio financeiro: UESC

Trabalho selecionado para a JNIC pela instituição: UESC.

Introdução:

Frações contínuas constituem um exemplo interessante de procedimento que é finito, quando operado sobre números racionais, e infinito, quando o número dado é irracional. A origem das frações contínuas está na Grécia, onde as frações, para efeito de comparações, eram todas escritas com numerador "1". O objetivo geral deste projeto é apresentar a teoria de frações contínuas enfatizando seus aspectos de aproximação e dinâmica e estabelecer algumas relações entre com a Transformação de Gauss. Na primeira parte do estudo, incluímos o estudo da chamada aproximação diofantino (sucintamente, como um número é aproximado por números racionais). Quando estudamos as inclusões dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, a passagem dos números racionais para os números reais é sem dúvida a mais complicada conceitualmente e a representação de um número real está diretamente ligada a própria noção de número real. Estudamos que essa passagem é muito bem compreendida, utilizando a teoria de frações contínuas. Na segunda parte, estudamos as frações contínuas do ponto de vista dinâmico com o estudo da Transformação de Gauss e introduzimos ferramentas

matemáticas da teoria de Sistemas Dinâmicos, como a noção de órbita de um ponto, conjuntos ômega e alfa limites e também indicamos alguns conceitos topológicos do sistema, em particular, os pontos de descontinuidade dessa transformação e seu gráfico, e finalmente, estabelecemos a relação que permite ser feita entre as expansões em frações contínuas com o estudo das iterações da transformação de Gauss.

Metodologia:

A metodologia de pesquisa foi mediante realizações de seminários e apresentações semanais dos estudos realizados durante a semana. O livro referencial principal foi o [4].

Resultados e Discussão:

Seguindo a proposta do Projeto, pôde-se introduzir alguns conceitos básicos de Sistemas Dinâmicos de uma forma mais ilustrativa mediante o estudo de um modelo clássico que é a Transformação de Gauss. Além disso, também pôde introduzir esse modelo clássico mediante a teoria de frações contínuas, que é uma ferramenta matemática excelente. Como resultado central desde projeto podemos destacar a, demonstração da caoticidade da Transformação de Gauss, que foi alcançada, através das demonstrações dos seguintes teoremas

- A transformação de Gauss é topologicamente misturadora.
- Os pontos periódicos da transformação de Gauss formam um conjunto denso de $[0,1)$.
- Existe um conjunto residual D de $[0,1$

Conclusões:

O estudo da Transformação de Gauss mediante a teoria de frações contínuas foi um excelente introdução ao estudo desses dois tópicos extremamente relevantes. Esses resultados alcançados são aplicáveis tanto na teoria de Sistemas Dinâmicos quanto em Matemática Aplicada, Aritmética e Teoria da Medida.

Referências bibliográficas

1. B. Hasselblatt, A. Katok, A first course in dynamics. With a panorama of recent developments, Cambridge University Press, (2003).
2. C. G. T. A. Moreira, Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA (2011).
3. C. G. T. A. Moreira, Propriedades estatísticas de frações contínuas e aproximações diofantinas: o Teorema de Khintchine, Revista Matemática Universitária número 29, pp. 125-137 (2010).
4. L.J. Dias, D.R. Jorge, Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA (2007).
5. M. Brin, G. Stuck, Introduction to dynamical systems, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).
6. M. Iosifescu, C. Kraaikamp, Metrical theory of continued fractions, Mathematics and its Applications, 547, Kluwer Academic Publishers, (2002).