1.01.04 – Matemática Aplicada / 3.05.02 Engenharia Mecânica – Engenharia Térmica

PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO RELACIONADO COM A ESTERILIZAÇÃO DE ALIMENTOS ENLATADOS

Rodrigo José da Silva[1], José Angel Dávalos Chuquipoma[2]
1. Estudante de IC do Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de São João Del Rei
2. UFSJ – Departamento de Matemática / Orientador

.

Resumo:

O presente estudo trata do controle ótimo de um sistema de parâmetros distribuídos aplicado a um problema de esterilização de alimentos enlatados. O modelo consiste em uma equação diferencial parcial do tipo parabólica que modela a distribuição de temperatura a qual o alimento é exposto a fim de assegurar a esterilização. Busca-se minimizar tanto a degradação dos nutrientes presentes no alimento quanto o custo em energia para o processo.

Formulado o problema de controle ótimo, o interesse está na obtenção do sistema de otimalidade formado pela equação do estado (problema de esterilização), equação de estado adjunto e a condição de otimalidade (neste caso, a *Derivada de Fréchet* da função de custo). A obtenção do sistema de otimalidade, bem como a existência e a unicidade do controle do estado ótimo, constituem o estudo geral do problema.

Palavras-chave: Controle Ótimo; Esterilização de Alimentos Enlatados; Problema de Controle

Apoio financeiro: FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa de MG

Trabalho selecionado para a JNIC pela instituição: UFSJ

Introdução:

Teoria do controle ótimo de sistemas de parâmetros distribuídos é uma ferramenta fundamental em matemática aplicada. Desde o livro pionerio de *J.-L. Lions* [11], publicado em 1968, muitos trabalhos têm se dedicado tanto aos aspectos teóricos quanto às aplicações práticas relacionadas ao tema. O presente projeto pertence a este segundo conjunto, isto é, o estudo do problema de controle ótimo para esterilização industrial de alimentos enlatados quanto ao processo térmico adequado (um dos procedimentos de esterilização mais importantes para o alimento é tal processo, pois é necessário eliminar problemas sanitários).

Um fator de segurança excessivo durante o processo térmico pode levar a uma degradação dos nutrientes e uma deterioração das propriedades qualitativas, bem como um custo desnecessário em energia. A fim de cumprir este pedido de qualidade de apresentação do alimento que é exigido, é de suma importância conhecer o perfil ideal da temperatura na câmara de esterlização durante o processo.

O objetivo do desenho de um processo térmico para esterilização de alimentos em conserva encontra-se em determinar o perfil da temperatura ótima de vapor $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$ na câmara de esterilização, em cada instante $\boldsymbol{t}$ variando em $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{T})$. Supondo que a transferência de calor se dá por condução, considera-se uma lata ocupando um domínio tridimensional Ω no destilador com fronteira $\boldsymbol{\Gamma}$. A transferência de calor pode ser modelada pelo problema de valor de fronteira e condição inicial onde $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ é a temperatura, $\boldsymbol{\rho}$ a massa específica, $\boldsymbol{c}$ o calor específico, $\boldsymbol{k}$ a condutividade térmica, $\boldsymbol{\alpha}$ o coeficiente de transferência de calor a ser medido, dependendo, em particular, do material da lata (estanho), $\boldsymbol{\eta}$ o vetor normal unitário e $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{0}}$ a temperatura inicial. Consequentemente determina-se o problema de valor de fronteira e valor inicial:

$$
\begin{aligned}
\rho(\theta)c(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t} - \nabla\cdot(k(\theta)\nabla\theta) &= 0, \qquad \text{em } Q = \Omega\times(0,T) \\
k(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\eta} &= \alpha(v-\theta), \quad \text{sobre } \Sigma = \Gamma\times(0,T) \\
\theta(x,0) &= \theta_0(x), \qquad \text{em } \Omega
\end{aligned}
$$

Dado o problema de valor de fronteira e condição inicial e, sendo $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})$ a função de custo do processo de esterilização, onde ∅ e $\boldsymbol{G}$ são funções reais e continuamente diferenciáveis relacionadas com os dados de degradação dos nutrientes e eliminação dos microorganismos respectivamente e $\boldsymbol{N}$ um parâmetro real não negativo que representa o peso relativo de ambas as funções no valor da função de custo, temos como objetivo estudar e determinar a existência e unicidade da solução do problema $(\boldsymbol{P})$ de controle ótimo, sendo $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}\}$ a solução do problema de valor de fronteira e valor inicial apresentado anterior apresentado:

$$
(P)\begin{cases} \displaystyle\min_{\{v,\theta\}\in U_{ad}\times L^2(0,T;L^2(\Omega))} J(v,\theta) = N\int_0^T \phi(v)dt - \int_\Omega e^{-\int_0^T G(\theta)dt}dx \\ \text{onde } \{v,\theta\} \text{ é a solução do problema.} \end{cases}
$$

Metodologia:

A metologia se inicia na obtenção de novos resultados até a consolidação e o aperfeiçoamento dos mesmos. Formulados os objetivos do projeto, foi adotada a metodologia proposta pelo orientador com o intuito de complementar a formação profissional obtendo um processo lógico para uma melhor compreenssão do problema em estudo.

Para atingir os objetivos propostos, foram adotadas as seguintes etapas:

1. Introdução aos *Espaços de Sobolev* e Elementos de Análise Funcional foram o ponto de partida no desenvolvimento do projeto. Dado o elevado conteúdo matemático apresentado pelo mesmo, foi de significativa importância conhecer e colocar em prática esses conceitos. Tais ferramentas de tipo técnico têm enriquecido a abordagem e a possibilidade de estudo de outros problemas dentro da teoria de controle ótimo. Nessa primeira parte da pesquisa, as referências **[12, 17]** deram o suporte e a compreensão do problema.

2. Nesta segunda etapa teve-se como objetivo estudar o problema de esterilização de alimentos enlatados (equação de estado), a sua formulação como um problema de valor de contorno e condição inicial. Através das referências bibliográfias [2, 3, 7, 8, 13, 17] foi possível mostrar que é possível obter uma única solução do problema de esterilização de alimentos enlatados. Tal resultado, posteriormente, implicará na existência e unicidade da solução do mesmo.

3. Foi efetuado o estudo de problemas de controle ótimo, em particular o estudo de problemas de minimização com restrições. Problemas de minimização constituem uma das principais ferramentas matemáticas, chave no desenvolvimento deste projeto. Através das referências [9, 11, 12, 15] foi realizado o estudo de elementos de análise convexa, *Derivada de Fréchet*, *Equação de Euler* e inequação variacional para o caso de minimização com restrições (condições de otimalidade).

4. Finalmente, fazendo uso da teoria de controle ótimo de sistemas de parâmetros distribuídos, obtém-se o resultado principal do projeto: o sistema de otimalidade. A equação de estado adjunta simplifica a condição de otimalidade (derivada de Fréchet da função de custo). Para provar a existência e unicidade do controle ótimo do problema de controle $(\boldsymbol{P})$ e as respectivas condições de otimalidade, foram seguidas as ideias contidas em *Bermudez* [4, 5, 6], *Casas* [8] e *Lions* [12].

Resultados e Discussão:

Com base na metodologia e referências utilizadas, foi possível obter o resultado principal do projeto - o sistema de otimalidade suficiente para satisfazer a solução do problema de controle ótimo e unicidade da mesma:

Seja $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U_{ad}}$ solução do problema de controle ótimo $(\boldsymbol{P})$. Então existem $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{g}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}} > 0$ e $\boldsymbol{q}$ tal que

$$
\begin{aligned}
\theta &\in C(\bar{Q}), \\
p\in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\ \frac{dp}{dt} &\in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ p|_\Sigma \in H^{1/2}(\Sigma), \\
g\in L^1(Q),\ g|_\Sigma &\in L^1(\Sigma), \quad q \in C(\bar{\Omega})'
\end{aligned}
$$

e satisfazendo

$$
\begin{aligned}
\rho c\frac{d\theta}{dt} - \nabla\cdot(k\nabla\theta) &= 0 \qquad \text{em } Q, \\
k\frac{d\theta}{d\eta} + \alpha\theta &= \alpha u \qquad \text{sobre } \Sigma, \\
\theta(x,0) &= \theta_0(x) \quad \text{em } \Omega, \\
-\rho c\frac{dp}{dt} - \nabla\cdot(k\nabla p) &= G'(\theta)e^{-\int_0^T G(\theta)dt} \quad \text{em } Q, \\
k\frac{dp}{d\eta} + \alpha p &= 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\
p(x,T) &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\
\langle g, \rho c\frac{d\varphi}{dt} - \nabla\cdot(k\nabla\varphi)\rangle_{Y,Y'} &= \langle (DH(\theta(u)))^* q, \varphi\rangle_{C(\bar{Q})'C(\bar{Q})}, \quad \forall\varphi\in\mathcal{R},
\end{aligned}
$$

onde

$$Y = \{w \in C(\bar{Q}) \ / \ w_{|\Sigma} = 0\}, \quad q \in \partial \chi_{E(H(\theta(u)))},$$

$$\mathcal{R} = \{\psi \in H^{2,1}(Q) \ / \ \rho c \frac{d\psi}{dt} - \nabla \cdot (k \nabla \psi) \in Y, \ \ k \frac{d\psi}{d\eta} + \alpha \ \ \psi = 0, \psi(0) = 0\}.$$

e a condição de otimalidade é dada por

$$\bar{\lambda} \left\{ \int_0^T \left(N\phi'(u) + \int_\Gamma \alpha p d\sigma \right) (v-u) dt \right\} + \int_0^T \left(\int_\Gamma \alpha g d\sigma \right) (v-u) dt \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Conclusões:

Foi possível concluir o objetivo de determinar a existência de uma solução e a unicidade da mesma para questões de controle ótimo aplicado à esterilização de alimentos enlatados quando dado um problema de restrições pontuais e condição inicial. O presente trabalho possibilitou aproximar, de forma clara e eficiente, os estudos em matemática avançada e aplicada e um problema real visto no ramo da engenharia. Vale ressaltar a importância dessa proximidade. Afinal, uma vez que um curso de graduação em engenharia muitas vezes não faz tal correlação aprofundada e avançada entre ferramentas matemáticas e problemas físicos, esta pesquisa torna-se um complemento enriquecedor para a formação de um engenheiro. É notável, inclusive, a possibilidade de aplicar tal ferramenta de obtenção de um sistema de otimalidade pra quaisquer tipos de problemas de controle que possuam tais restrições pontuais, não só em problemas de controle térmico, bem como em problemas de controle de vibrações em equipamentos, cargas cíclicas aplicadas em vigas e outras questões de engenharia, de forma análoga.

Referências Bibliográficas

[1] Álvarez Váquez L. and Martínez A; *Modelling and control of natural convection in canned foods*. IMA J. Appl. Math. 63 (1999) 246-265.

[2] Banks, H. T; *Control and Estimation in Distributed Parameter Systems*. Siam, Philadelphia, 1992.

[3] Bermúdez, A. and Martinez A; *Optimal control of industrial sterilization of canned foods. In Control of Distributed Parameter Systems, selected papers from the V IFAC Symposium held in Perpignan*. France, pp. 405-409 (1990). Pergamon Press, Oxford.

[4] Bermúdez, A. and Martínez A; *A state constrained optimal control problem related to the sterilization of canned foods*. Automatica. The IFAC Journal 30 319-329 (1994).

[5] Bermúdez, A; *Some Applications of Optimal Control Theory of Distributed Systems. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. Vol. 8, 195-218 (2002).

[6] Bermúdez, A. and Saguez C; *Optimal control of a Signorini problem*. SIAM J. Control and Optimization, 25, 576-582 (1987).

[7] Bonnans J.F. and Casas E; *Contrôle de systémes elliptiques semilinéaires comportant des contraintes distribuées sur l'état, in Nonlinear partial díerential equations and their applications*, edited by H. Brezis and J.-L. Lions. Pitman (1988).

[8] Casas E; *Control of an elliptic problem with pointwise state constraints*. SIAM J. Control Optim. 24 (1986) 1309-1318.

[9] Ekeland I. and Temam R; *Convex analysis and variational problems*. North-Holland, Amsterdam (1976).

[10] Lasiecka, I; *State constrained control problems for parabolic systems: regularity of optimal solutions*. Appl. Math. Optim., 6, 1-29 (1980).

[11] Lions, J. L; *Contrôle Optimal des Systémes Gouvernés par des Équations aux Deriveés Partielles*. Dunod – Gauthiers Villars, Paris 1968.

[12] Lions, J. L; *Quelques Méthodes de Resolution des Problemes aux Limites non Lineaires*. Dunod - Gauthiers - Villars, Paris, 1969.

[13] Mackenroth, U; *Convex parabolic boundary control problems with pointwise state constraints*. J. Math. Anal. Appl., 87, 256-277 (1982).

[14] Nadkarni, M. and T. A. Hatton; *Optimal nutrient retention during the thermal processing of conduction- heated canned foods: application of the distributed minimum principle*. J. Food Sci., 50, 1312-1321 (1985).

[15] Neittaanmaki P. and Tiba D; *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems: Theory, Algorithms and Applications. Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Texbooks*. NY. 1994.

[16] Olin Ball, C. and F. C. W. Olson; *Sterilization in food technology*. McGraw- Hill, NY. (1957).

[17] Salsa, Sandro; *Partial Diferential Equations in Action From Modelling to theory*. Springer - Verlag Italia, Milano 2008.

[18] Sagny, I. and M. Karel; *Optimal retort temperature pro_le in optimizing thiamine retention in conduction type heating of canned foods*. J. Food Sci., 44, 1485-1490 (1979).

[19] Santina de F. Arantes; Jaime E. Muñoz Rivera; *Optimal control theory for ambient pollution. International Journal of Control*, volume 83, Issue 11, 2010.