1.01.99 - Matemática.

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NA GENÉTICA

Ravine T. Wenningkamp[1], Taísa J. Miotto[2]
1. Estudante de graduação do curso de Matemática da UFSM
2. UFSM - Departamento de Matemática / Orientadora

Resumo:

A álgebra linear está presente nas mais diversas áreas do conhecimento e nos fornece ferramentas que podem ser aplicadas em vários campos. O presente trabalho tem como objetivo utilizar-se dessas ferramentas para estudar a propagação de uma característica herdada em sucessivas gerações através da modelagem matemática de um problema de hereditariedade apropriado e, a partir deste, do cálculo de potência de matrizes.

Sabendo que cada indivíduo possui um par de genes, denotados por A e a, e que resultam em três possíveis genótipos, considera-se uma população de plantas onde cada uma delas é sempre fertilizada por uma planta do genótipo AA, desse modo, pretende-se descobrir como será a distribuição dos três genótipos na população depois de várias gerações.

Este trabalho foi desenvolvido a partir de um projeto de pesquisa que tem como base os estudos na área da álgebra linear, sendo que estes conceitos estudados tiveram grande importância na aplicação desse problema de hereditariedade.

Palavras-chave: Matrizes; autovalores; hereditariedade autossômica.

Apoio financeiro: Programa de Educação Tutorial – SESU/PET.

Trabalho selecionado para a JNIC pela instituição: UFSM

Introdução:

O estudo dos conceitos de álgebra linear nos permite a possibilidade de poder aplicá-lo em outras áreas do conhecimento, como acontece nesse caso, em relação à aplicabilidade no campo da genética.

Denota-se hereditariedade autossômica o modo pelo qual os genes dos pais são passados para seus descendentes. Sabendo que cada indivíduo possui um par de genes, denotados por A e a, e que estes podem formar três possíveis genótipos que determinam as características exteriores de cada indivíduo, sendo eles AA, Aa e aa, são estudados os prováveis genótipos dos descendentes, a partir do genótipo dos pais, fazendo uso de modelos matriciais, e por meio desses modelos acompanha-se a distribuição genotípica de uma população através de sucessivas gerações. Para tanto, são utilizados os conceitos de autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes, mostrando a relevância da álgebra linear na resolução de problemas ligados à outra área.

Desse modo, o objetivo principal é investigar a propagação de uma característica herdada em sucessivas gerações, através do cálculo de potência de matrizes.

Metodologia:

Este trabalho teve início a partir de um projeto de pesquisa que tem como base os estudos na área da álgebra linear. Foram realizados encontros semanais entre a orientadora e a orientanda, no qual eram feitos seminários relacionados ao estudo aprofundado dos conteúdos desse ramo da matemática.

Depois de abordados os vários conceitos de álgebra linear, estes foram utilizados na aplicação de um problema de hereditariedade, resultando no presente trabalho.

E, a parte da aplicação na área de genética teve como base para estudo uma aplicação do livro "Álgebra linear com aplicações " dos autores Howard Anton e Chris Rorres.

Resultados e Discussão:

Consideremos por suposição que a característica hereditária é comandada por um conjunto de dois genes A e a. Os prováveis pares são AA, Aa e aa, que denominamos genótipo do indivíduo. Na hereditariedade autossômica, um indivíduo recebe um gene de cada par de genes de seus pais para formar seu par único e próprio.

Podemos pensar em uma população de plantas e supor que cada planta da população é sempre fertilizada por uma planta do genótipo AA. Sejam:

a_n = fração de plantas do genótipo AA na n-ésima geração;
b_n = fração de plantas do genótipo Aa na n-ésima geração;
c_n = fração de plantas do genótipo aa na n-ésima geração.

Através das probabilidades existentes dos possíveis genótipos dos descendentes para todas as possíveis combinações de genótipos dos pais, obtém-se equações que podem ser descritas na forma matricial $x^{(n)} = Mx^{(n-1)}$, para $x^{(n)}$ a matriz coluna consistindo das frações dos genótipos na n-ésima geração e M matriz apropriada. Recursivamente a equação mencionada transforma-se em $x^{(n)} = M^{(n)}x^{(0)}$, e dessa forma para se obter uma expressão para a n-ésima geração é necessário encontrar $M^{(n)}$.

Utilizando-se dos conceitos de autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes é possível encontrar uma forma de obter $M^{(n)}$ como $PD^{(n)}P^{-1}$, onde P, P^{-1} e D são matrizes, sendo D matriz diagonal, e assim: $x^{(n)} = PD^{(n)}P^{-1}x^{(0)}$. Através dessa fórmula pode-se ter uma estimativa da distribuição dos três genótipos na n-ésima geração e também a longo prazo, utilizando para isso o processo de limite. Através dos cálculos pode-se mostrar que no limite todas as plantas da população serão do genótipo AA. Pode-se ainda modificar esse problema, fertilizando as plantas por plantas de genótipos diferentes e analisando o que ocorre a longo prazo em cada caso.

Conclusões:

Este trabalho teve como foco utilizar as várias ferramentas fornecidas pela álgebra linear para poder aplicar em um problema de hereditariedade. Sendo assim, foram estudados conceitos e definições desse ramo da matemática e que tiveram grande importância nessa aplicação.

Dessa maneira, percebe-se o quão importante é a álgebra linear, não apenas neste exemplo, mas também em várias outras aplicações, e por isso é fundamental ter um domínio de suas ferramentas para poder interligar com as mais diversas áreas do conhecimento.

Referências bibliográficas

LEON. S.J. **Álgebra linear com aplicações**, 4ºed, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1999.

ANTON. H.; RORRES C. **Álgebra linear com aplicações**, 10ºed, Porto Alegre: Bookman, 2012.