3.01.02 - Engenharia civil / Estruturas

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESPECTRAL DE ALTA ORDEM APLICADO A PROBLEMAS 1-D E 2-D DA ELASTOSTÁTICA

Luís Philipe R. Almeida[1]*, Fabio C. da Rocha[2]
1. Estudante de IC da Universidade Federal de Sergipe, UFS.
2. Professor da Universidade Federal de Sergipe, UFS.

Resumo:
Na tentativa de representar geometrias e carregamentos com característica complexa, através da modelagem computacional via Método dos Elementos Finitos, erros numéricos podem acontecer, a depender da base dos pontos nodais, do número de elementos e do grau aproximador. Para garantir a convergência na representação desses tipos de problemas, aproximações de alta ordem associadas às bases ortogonais de Lobatto, Legendre, Chebyshev e da base nodal equidistante (esta última não ortogonal) são aplicadas na análise de problemas uni e bidimensionais da elastostática. Um estudo comparativo entre as bases nodais é feito com o intuito de verificar a convergência à medida que é elevado a ordem polinomial, levando-se em consideração parâmetros quantificadores como a constante de Lebesgue e o número de condição pela norma euclidiana. Exemplos são avaliados e constatado a melhora da solução quando é utilizada expansões espectrais em detrimento da interpolação de base igualmente espaçada.

Palavras-chave: Método dos Elementos finitos, Interpolação espectral, Polinômios ortogonais.

Trabalho selecionado para a JNIC pela instituição: UFS

Introdução:

Métodos discretos são utilizados quase que exclusivamente na solução numérica de modelos matemáticos do contínuo, representados por meio de problemas de valor inicial e/ou de contorno do cálculo diferencial. O método dos elementos finitos é o mais utilizado e tem como principal vantagem, sua capacidade em lidar com diferentes tipos de complexidades, sejam estas encontradas nas não-linearidades dos materiais ou mesmo em diferentes fontes de singularidades, tais como devido a característica geométrica ou devido a condições de contorno. Diante do exposto, a comunidade da mecânica computacional vem lidando com problemas cada vez mais complexos, obrigando o uso de ferramentas que associem eficiência e precisão na modelagem computacional de geometrias e carregamentos que apresentam esse tipo de particularidade. Por este motivo, interpolações de alta ordem (espectrais) associadas ao MEF são implementadas com o intuito de assegurar a convergência uniforme, o que de modo geral, necessita da análise do erro juntamente com o Método dos Elementos Finitos em si (ZIENKIEWICZ; RANK, 1987). O mais importante é assegurar a estabilidade na solução numérica do problema, o que em termos gerais, necessita da aplicação de expansões espectrais onde os nós de colocação são posicionados cuidadosamente sobre os elementos tomados individualmente (ROCHA; KZAM, 2013).

Como critério para verificar o desempenho dos conjuntos de bases nodais é utilizado o número de condição pela norma euclidiana e a constante de Lebesgue, definida como a soma dos valores máximos absolutos das funções de interpolação sobre todos os nós (BLYTH; POZRIKIDIS, 2005). Esses parâmetros são importantes para limitar o erro na interpolação, pois de acordo com Chen et al. (2013), a utilização de aproximações de alta ordem implica no aparecimento de oscilações nas extremidades do intervalo interpolado, caracterizado como fenômeno Runge e quantificado pelo valor da constante de Lebesgue.

Este trabalho tem como objetivo desenvolver e implementar computacionalmente, na linguagem FORTRAN, a formulação do MEF para problemas da elastostática uni e bidimensionais a partir da utilização de funções interpoladoras de alta ordem com característica espectral, bases ortogonais de Lobatto, Legendre e Chebyshev, e com característica não espectral (base igualmente espaçada).

Metodologia:

O Método dos Elementos Finitos é rotineiramente aplicado usando expansões de elementos de baixa ordem, em que a solução necessária de uma equação integral é aproximada por funções quadrática, linear ou constante ao longo de cada elemento interpolado (BREBBIA, 1978; BREBBIA E WALKER, 1980. POZRIKIDIS, 1992). Indo de encontro à linha usual, a implementação de aproximações de ordem superior é desenvolvida com o intuito de garantir convergência da solução física do problema, o que requer o uso de expansões espectrais em posições selecionadas ao longo dos elementos. No entanto, a implementação de alta ordem do Método dos Elementos Finitos é muitas vezes dificultada devido ao seu caráter teórico e computacional, especificamente a versão m do MEF precisa de alta qualidade na integração numérica e diferenciação numérica, funções de forma apropriadas, continuidade inter-elemento C^0, numeração dos graus de liberdade, aplicações das condições de contorno e pós-processamento dos resultados (NOGUEIRA; BITTENCOURT, 2007).

Diante do exposto acima, neste trabalho são utilizadas expansões espectrais em que os nós de colocação serão dispostos nos zeros dos polinômios ortogonais de Lobatto, Chebyshev e Legendre, frente aos nós distribuídos uniformemente. Com base no estudo feito por Blyth e Pozrikidis (2005), para a modelagem bidimensional foi utilizado um conjunto de Lobatto para elemento triangular, construído por regras simples, e que goza de propriedades de convergência na interpolação comparáveis ao conjunto de pontos mais desejáveis de Fekete, garantindo assim, uma boa precisão na reprodução de problemas de difícil modelagem numérica. Um estudo comparativo entre essas bases com o intuito de verificar a convergência uniforme é desenvolvida à medida que o grau aproximador é elevado. Como parâmetro para quantificar o desempenho dos conjuntos nodais, é utilizada a constante de Lebesgue, e o número de condição pela norma euclidiana.

A implementação computacional é desenvolvida na linguagem FORTRAN tanto para elementos de alta ordem espectral, quanto para elementos de alta ordem com característica não espectral (Lagrange). Como pré-processador foi utilizado o Gmsh, e como pós-processador o Acadview. Para validar o exposto acima, exemplos numéricos em uma e duas dimenões são analisados a medida que a ordem polinomial é aumentada.

Resultados e Discussão:

Nesta seção são aplicadas as estratégias de interpolação apresentadas nas seções anteriores com o intuitor de avaliar a influêcia das bases nodais na reprodução de geometrias e na representação de problemas físicos de alta complexidade uni e bidimensionais via MEF.

1 – Reprodução da função Racional:

Inicialmente foi analisada a eficiência das bases nodais na interpolação de uma função com característica complexa descrita pela equação $1/(1+25x^2)$. Nesta análise, é realizado um estudo do fenômeno Runge, a partir da convergência entre as bases ortogonais, equiparando-as com a equidistante. O intervalo de mapeamento se dá em $[-1,1]$.

Como resultado, é possível observar (ver figura 1) um péssimo desempenho da base igualmente espaçada localizado nas regiões próximas as bordas do elemento interpolado. Na figura 2, pode ser observado pela constante de Lebesgue (Fig. 2a) e pelo número de condição (Fig. 2b), o baixo desempenho da base equidistante em recuperar a geometria aqui analisada (com pico de intensidade) quando comparado com as bases espectrais, à medida que o grau da aproximação é elevado.

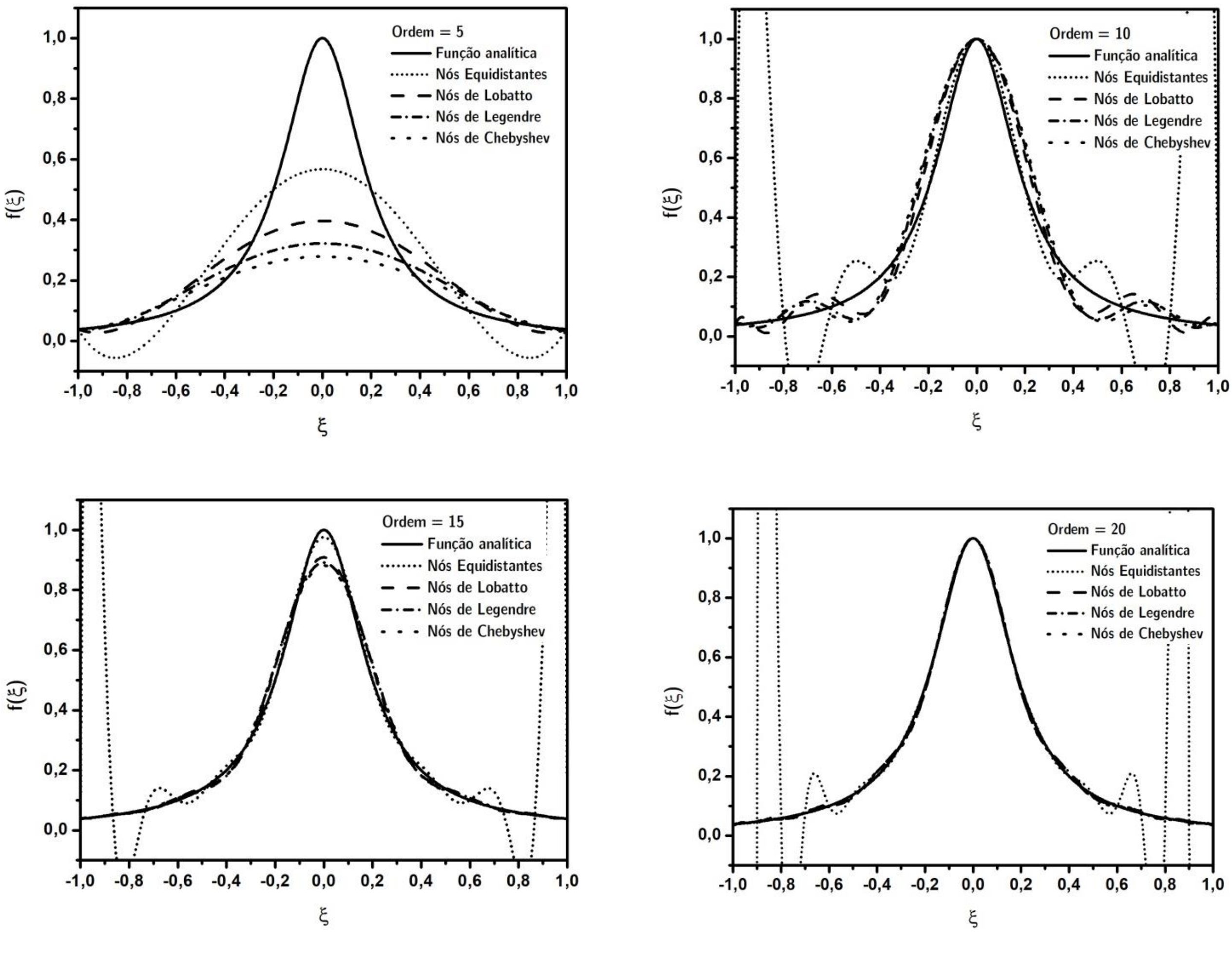
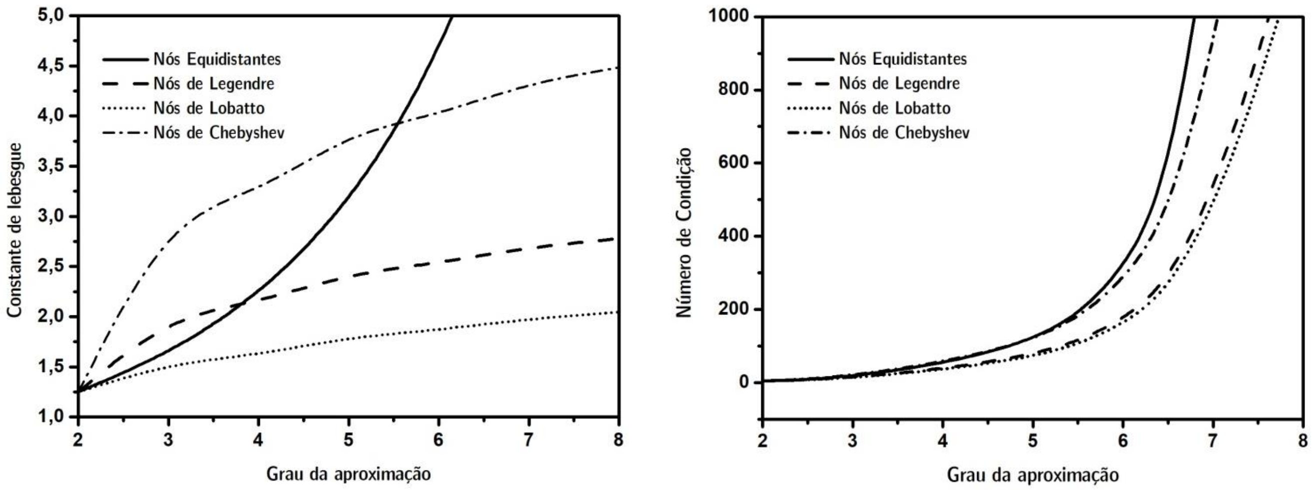


Figura 1. Efeito da distribuição da base na interpolação polinomial racional (fenômeno Runge).



(a) (b)

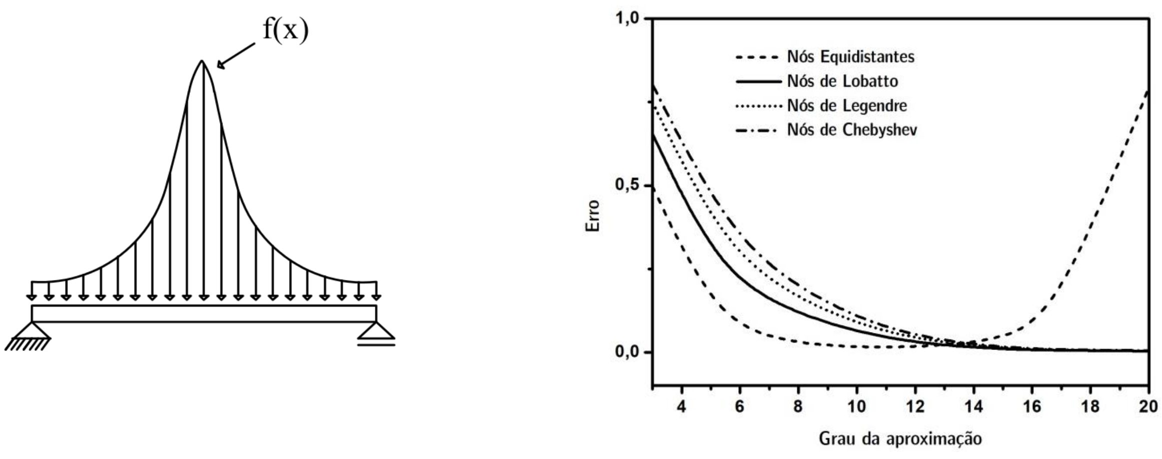
Figura 2. Constante de Lebesgue (a) Número de condição (b).

2 – Discretização de uma viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento racional:

Para a abordagem unidimensional, a teoria de Euler Bernoulli para vigas é descrita pela equação diferencial:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1}{1+25x^2} \tag{1}$$

Para a análise numérica, um único elemento finito foi utilizado para a discretização do problema, à medida que a ordem polinomial foi aumentada para todas as bases apresentadas anteriormente. Com base na Figura 3, é possível observar a baixa performance da base igualmente espaçada ao tentar recuperar a estrutura aqui em análise. Em contrapartida, a base espectral, formada pelos polinômios ortogonais, conseguiu convergir para a solução de referência assim que a ordem polinomial foi aumentada.

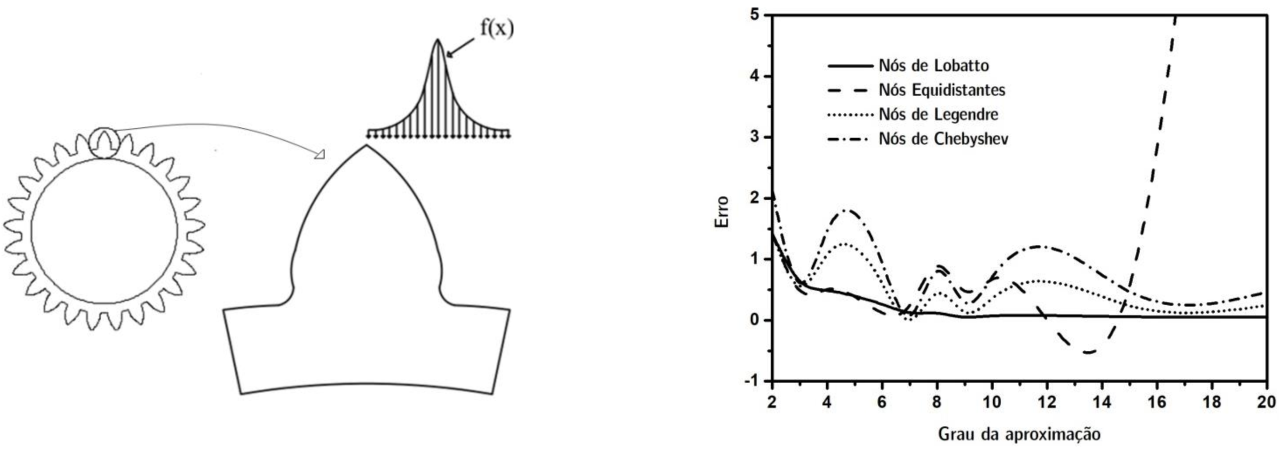


(a) (b)

Figura 3. Viga simplemente apoiada submetida a um carregamento racional (a) Erro no deslocamento máximo (b).

3 - Discretização de uma engrenagem em duas dimensoões:

Com o intuito de avaliar a influência das bases nodais na solução de problemas físicos de alta complexidade, é apresentado o desenho geométrico de uma engrenagem (Figura 1a) submetida a um carregamento complexo dado pela função racional $1/(1+25x^2)$. Para a obtenção da solução de referência, foi utilizado 22000 elementos triangulares de grau 2 para o domínio e 112 elementos unidimensionais de grau 2 para a aproximação do carregamento. Já para a análise numérica via MEF foram utilizados 2 elementos para o domínio e apenas 1 para o carregamento (abordagem unidimensional). Os graus de aproximação variaram entre 2 a 20, os quais foram comparados considerando a base espectral formada pelos polinômios ortogonais e a base igualmente espaçada.



(a) (b)

Figura 4. Representação geométrica da engrenagem (a) Erro no deslocamento máximo (b).

Cabe observar (Fig. 4b) que as bases ortogonais conseguiram assegurar estabilidade e convergência à medida que o grau interpolador foi aumentado, em destaque a base de Lobatto, que obteve melhor precisão dentre as demais, enquanto efeito adverso é apresentado pela base equidistante com o aumento da ordem de aproximação.

Conclusões:

Foi desenvolvida uma nova abordagem de interpolações aplicadas ao MEF uni e bidimensional para problemas da elastostática, onde expansões espectrais foram implementadas com o intuito de garantir a convergência na representação física de problemas com característica complexa. Foi evidenciado que o erro na interpolação está diretamente associado a escolha da base dos pontos nodais, sendo esta, decisiva na geração de funções interpoladoras. Neste trabalho, significativa eficiência na interpolação foi verificado ao utilizer as bases ortogonais na representação de geometrias e carregamentos com característica complexa quando o número de elementos era fixado e a ordem polinomial era aumentada.

Referências bibliográficas

NOGUEIRA A.C.; BITTENCOURT M.L. **Spectral/HP finite elements applied to linear and non-linear structural elastic problems**. Latin American Journal of Solids and Structures 4, 61–85, 2007.

BLYTH, M. G., POZRIKIDIS, C. **A Lobatto interpolation grid over the triangle.** IMA Journal of applied Mathematics Advance, vol. 71, n.1, pp. 153-169, 2005.

CHEN, Y. J.; HE, H. Y.; ZHANG, S. L. **A new algebra interpolation polynomial without Rung phenomenon**. Applied Mechanics and Materials. n. 3003-306, p. 1085-1088. 2013.

BREBBIA, C. A. **The Boundary element Method for Engineers**. London: Pentech Press, 1978.

BREBBIA, C. A.; WALKER, S. **Boundary element techniques in engineering**. London: Newnes-Butterworths. 1980.

POZRIKIDIS, C. **Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow**. Cambridge: Cambridge University Press. 1992.

ROCHA, F. C., KZAM, A. K. L. **Análise das aproximações de alta ordem por meio da interpolação espectral aplicadas ao MEC potencial**. In proceeding XXXIV Iberian Latin-American Congress on computational Methods in Engineering, 2013.

ZIENKIEWICZ, O. C., RANK, E. **A simple error estimator in the finite element method. Communications in applied numerical methods**, vol. 3, pp. 243-249, 1987.