1.01.04 - Matemática / Matemática Aplicada

CONSTRUÇÃO DE CÓDIGOS ESFÉRICOS USANDO A FIBRAÇÃO DE HOPF

Henrique Koji Miyamoto[1], Henrique Nogueira de Sá Earp[2], Sueli Irene Rodrigues Costa[2]
1. Estudante de graduação da FEEC-Unicamp
2. Professores do IMECC-Unicamp / Orientadores

Resumo:

Apresentamos uma nova construção para códigos esféricos, baseada em folheações de esferas obtidas a partir da fibração de Hopf e inspirada pela construção em camadas de toros planares (TLSC). No caso base ($\mathbb{R}^4$), a 3-esfera é folheada por toros para realizar a construção em um algoritmo de dois passos: (i) escolher uma família de toros afastados de uma distância mínima *d* e (ii) distribuir pontos em cada toro com a mesma distância. No caso geral, tal procedimento é utilizado de maneira recursiva. Em dimensão 4, o procedimento é análogo ao método TLSC. Em dimensões maiores, para algumas distâncias mínimas, a construção apresentada tem desempenho melhor que as abordagens TLSC usadas para comparação.

Palavras-chave: empacotamento esférico; folheações da esfera euclidiana; distância mínima.

Apoio financeiro: FAPESP (processo 16/05126-0).

Trabalho selecionado para a JNIC pela instituição: Pró-Reitoria de Pesquisa da Unicamp

Introdução:

Um código esférico $C(M,n)$ é um conjunto de M pontos sobre a superfície da esfera euclidiana unitária $(n-1)$-dimensional $S^{n-1} \subset R^n$, i.e., $C(M,n) \coloneqq \{x_1, x_2, \dots, x_M\} \subset S^{n-1}$. Problemas com códigos consistem em buscar a melhor forma de distribuir pontos na superfície da esfera $(n-1)$--dimensional, de forma a otimizar algum parâmetro de interesse e têm aplicações em telecomunicações, física, matemática, química e outras áreas do conhecimento (Torezzan, 2013).

O problema tratado é o do empacotamento de esferas, que, na transmissão de sinais por canais gaussianos, corresponde à generalização natural da modulação PSK (*phase shift keying*). Esse problema se apresenta de maneiras duais, a saber: (i) Dados M pontos $(x_1, x_2, \dots, x_M)$, como distribuí-los sobre a superfície de S^{n-1} de forma tal a maximizar a distância mínima entre eles? (ii) Dada uma distância mínima d, qual é o maior número de pontos M que é possível distribuir na superfície de S^{n-1} de forma que a distância entre eles seja maior ou igual d?

O objetivo do trabalho é propor a construção de uma família de códigos esféricos, a partir da segunda abordagem do problema, cuja construção se baseia nas folheações que podem ser escritas a partir da fibração de Hopf, tendo como inspiração os códigos esféricos em camadas de toros planares de Torezzan et al. (2013).

Metodologia:

A fibração de Hopf é a aplicação

$$h: S^{2n-1} \to S^n$$
$$(z_0, z_1) \mapsto (2z_0\acute{z}_1, |z_0|^2 - |z_1|^2)$$

em que z_0, z_1 são elementos de uma das álgebras de divisão normada, a saber: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,$\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$ $(n = 1,2,4,8)$. Cada mapa de Hopf induz uma estrutura de fibras $S^{n-1} \hookrightarrow S^{2n-1} \to S^n$.

Em dimensão 4 $(n = 2)$, a fibração de Hopf permite escrever uma folheação da esfera S^3 por toros planares T^2, em termos dos parâmetros (η, ξ_1, ξ_2). Chamemos essa parametrização ι:

$$\iota: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2\pi[\to S^3$$
$$(\eta, \xi_1, \xi_2) \mapsto \left(e^{i\xi_1} sin\eta, e^{i\xi_2} cos\eta\right) = (z_0, z_1)$$

em que $\eta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\xi_j \in [0,2\pi[, j = 1,2$.

No caso mais geral, a esfera S^{2n-1} é folheada por variedades $S_{sin\eta} \times S_{cos\eta}$ $(n = 1,2,4,8)$, que são produtos de esferas com raios $sin\eta$ e $cos\eta$, de modo análogo à folheação de S^3 por toros T^2. Podemos escrever essa folheação mais geral na forma

$$\iota: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{2n-1}$$

De forma análoga ao caso geral, as folhas $(S^{n-1} \times S^{n-1})_\eta$ são parametrizadas por um valor $\eta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Essa folheação não está restrita aos casos $n = 1,2,4,8$, mas vale para qualquer $n \in N^*$, mesmo que não haja uma álgebra de divisão normada associada à dimensão da esfera S^{2n-1}.

O procedimento no caso base ($\mathbb{R}^4$) ocorre em duas etapas principais:

1. Variando o parâmetro η, escolher uma família de toros $T_\eta = S^1_{sin\eta} \times S^1_{cos\eta}$ mutuamente distantes de no mínimo δ (distância mínima do problema).
2. Em cada toro T_η, fazer uma distribuição de pontos que também respeite o limite δ. Para isso:
   (a) Escolhemos n círculos internos mutuamente distantes de no mínimo δ.
   (b) Em cada círculo interno, distribuímos m pontos de modo equidistante. Escolhemos também um ângulo de defasagem ψ na distribuição em círculos internos adjacentes, de forma a aumentar a densidade de pontos.

O caso geral utiliza o procedimento base de maneira recursiva:

1. Variando o parâmetro η, escolher uma família de folhas $S^{n-1}_{sin\eta} \times S^{n-1}_{cos\eta}$ mutuamente distantes de no mínimo δ (distância mínima do problema).
2. Em cada esfera de raios $\sin\eta$ ($S^{n-1}_{sin\eta}$) e $\cos\eta$ ($S^{n-1}_{cos\eta}$), a menos de escala, e combiná-las como produto cartesiano.

É possível usar essa generalização para qualquer $\mathbb{R}^{2n}$, desde que se tenha um procedimento algorítmico para distribuição na dimensão do caso base. No entanto, vamos nos concentrar aqui nas dimensões $\mathbb{R}^{2^k}, k = 2,3,4$ ..., que usam o $\mathbb{R}^4$ como caso base.

Os algoritmos foram implementados usando o programa *Mathematica 11.2 Student Edition* para a construção dos códigos esféricos.

Resultados e Discussão:

A Tabela 1 apresenta comparação do tamanho do código esférico inspirado pela fibração de Hopf com outras construções conhecidas em quatro dimensões, dentre elas a construção em camadas de toros planares (TLSC) de Torezzan et al. (2013).

Tabela 1: Códigos esféricos em R^4 para diferentes distâncias mínimas *d* (Torezzan et al., 2013)

d	Hopf	TLSC	Apple-peeling	Wrapped	Laminated
0,5	152	172	136	*	*
0,4	280	308	268	*	*
0,3	728	798	676	*	*
0,2	2.656	2.718	2.348	*	*
0,1	22.016	22.406	19.364	17.198	16.976
0,01	$2{,}27\times10^7$	$2{,}27\times10^7$	$1{,}97\times10^7$	$2{,}31\times10^7$	$2{,}31\times10^7$

(*): valores desconhecidos

Nesta dimensão, as construções Hopf e TLSC realizam procedimentos similares e apresentam desempenhos próximos (diferença menor que 14%), que são, para algumas distâncias mínimas, superiores ao dos outros métodos em comparação.

Para comparar o desempenho nas dimensões seguintes, utilizamos as construções TLSC apresentadas por Naves (2016), em quatro variações: subcódigo com k elementos, subcódigo com k! elementos, subcódigo em hiperplanos de k elementos e subcódigo em camadas de polígonos, em ordem crescente de complexidade. As Tabelas 2 e 3 apresentam os resultados para dimensões 8 e 16, respectivamente.

Tabela 2: Códigos esféricos em R^8 para diferentes distâncias mínimas d (Naves, 2016)

d	Hopf	TLSC – subcódigo com *k* elementos	TLSC – subcódigo com *k!* elementos	TLSC – subcódigo em hiperplanos de *k* elementos	TLSC – subcódigo em camadas de polígonos
0,5	1.156	2.748	*	2.768	2.312
0,4	8.608	8.916	*	9.724	11.229
0,3	$1{,}10\times10^5$	45.252	7.008	61.060	89.945
0,2	$2{,}28\times10^6$	$3{,}42\times10^5$	$1{,}18\times10^6$	$6{,}64\times10^5$	$2{,}15\times10^6$
0,1	$3{,}76\times10^8$	$6{,}47\times10^6$	$3{,}61\times10^7$	$2{,}75\times10^7$	$4{,}09\times10^8$
0,01	$4{,}28\times10^{15}$	$7{,}66\times10^{10}$	$4{,}61\times10^{11}$	$3{,}30\times10^{12}$	$5{,}19\times10^{15}$

(*): valores desconhecidos

Tabela 3: Códigos esféricos em R^{16} para diferentes distâncias mínimas *d* (Naves, 2016)

d	Hopf	TLSC – subcódigo com *k* elementos	TLSC – subcódigo com *k!* elementos	TLSC – subcódigo em hiperplanos de *k* elementos	TLSC – subcódigo em camadas de polígonos
0,5	49.152	69.984	*	70.016	$1{,}95\times10^5$

0,4	$8{,}10\times10^{5}$	$3{,}12\times10^{6}$	*	$3{,}12\times10^{6}$	$2{,}88\times10^{6}$
0,3	$8{,}99\times10^{7}$	$1{,}17\times10^{8}$	*	$1{,}23\times10^{8}$	$7{,}17\times10^{7}$
0,2	$6{,}93\times10^{10}$	$4{,}76\times10^{9}$	*	$7{,}44\times10^{9}$	$5{,}01\times10^{9}$
0,1	$4{,}16\times10^{15}$	$2{,}41\times10^{12}$	$2{,}88\times10^{14}$	$7{,}32\times10^{12}$	$2{,}39\times10^{15}$
0,01	$6{,}48\times10^{30}$	$3{,}66\times10^{20}$	$1{,}80\times10^{24}$	$1{,}19\times10^{22}$	*

(*): valores desconhecidos

Nessas dimensões, o procedimento Hopf é qualitativamente diferente do TLSC e, para algumas distâncias mínimas, apresenta o melhor desempenho da comparação.

Conclusões:

Apresentamos uma nova construção de códigos esféricos, baseada em folheações obtidas pela fibração de Hopf. Em dimensão 4, o método é similar ao TLSC e apresenta resultados próximos, de forma que pode ser considerado uma outra forma de realizar o procedimento. Enquanto que, para dimensões superiores, é qualitativamente diferente. Nestas, para algumas distâncias mínimas, o desempenho da construção Hopf é superior ao obtido pelo método TLSC. Deve-se destacar que os códigos apresentados têm construção algorítmica para dimensões $\mathbb{R}^{2^k}$, a qual pode ser estendida a outras dimensões, desde que haja um código construtível para a dimensão base.

Referências bibliográficas

TOREZZAN, C.; COSTA, S. I. R.; VAISHAMPAYAN, V. Constructive spherical codes on layers of flat tori. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 59, n. 10, p. 6655-6663, out. 2013.

TOREZZAN, C. **Códigos esféricos em toros planares**. 115 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

LYONS, D. W. An elementary introduction to Hopf fibration. **Mathematics Magazine**, v. 76, n. 2, p. 87-98, abr. 2003.

NAVES, L. R. B. **Códigos esféricos em canais grampeados**. 147 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.