

**COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DOS MOMENTOS E DA MÁXIMA  
VEROSSIMILHANÇA PARA ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO DE  
PROBABILIDADE WEIBULL**

LIDIANE APARECIDA BORGES<sup>1</sup>, CARLOS ROGÉRIO DE MELLO<sup>2</sup>; CAMILA CRISTINA  
ALVARENGA<sup>3</sup>.

**RESUMO**

Os métodos dos momentos e da máxima verossimilhança são os mais usados em estudos probabilísticos de variáveis hidrológicas para a estimativa de parâmetros de uma distribuição de probabilidade. Este trabalho tem como objetivo estimar e comparar os métodos de ajuste dos parâmetros da distribuição de probabilidade Weibull pelos Métodos dos Momentos e da Máxima Verossimilhança, para séries históricas de 57, 47, 37, 27 e 17 anos de vazões mínimas diárias anuais. A comparação entre os métodos ajustados foram feita por meio do teste do Qui-Quadrado ( $\chi^2$ ). Com a diminuição do tamanho da série, o Método da Máxima Verossimilhança apresentou melhor precisão no ajuste às séries históricas.

**Palavras-chaves:** Máxima Verossimilhança, Método dos Momentos, Distribuição de Probabilidade, vazão mínima.

**INTRODUÇÃO**

Estudos probabilísticos de variáveis hidrológicas são de extrema importância para o planejamento e gerenciamento do uso da água. Neste contexto, é de suma importância a estimativa de vazões mínimas em períodos de estiagem, visando à análise, regulamentação legal, operação e o planejamento de abastecimento de água e geração de energia. A análise das distribuições de frequências de vazões mínimas demanda o uso de distribuições estatísticas. Um dos problemas no uso de qualquer procedimento estatístico aplicado a dados hidrológicos está, segundo Silva e Assad (1998), na estimação dos parâmetros dessas distribuições. Os métodos de ajuste, dentre eles o dos momentos e o da máxima verossimilhança, podem conduzir a resultados diferentes. De acordo com Mello et al. (2005), o principal problema da metodologia da máxima verossimilhança consistia na dificuldade em se obter as estimativas dos parâmetros, devido à necessidade de aplicação de técnicas numéricas complexas. Katz et al. (2002) e Queiroz & Chaudhry (2006) relatam que variáveis hidrológicas com distribuição assintótica, como vazões máximas e mínimas, devem ser adequadamente tratadas do ponto de vista probabilístico, com ênfase nas metodologias de maior precisão. Existe a necessidade de se estudar, de forma comparativa, o comportamento de distribuições de probabilidade aplicado a séries históricas de vazão mínima diária anual. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é estudar o ajuste da distribuição de Probabilidade Weibull para diferentes tamanhos de séries históricas de vazões mínimas diárias anuais em Ibertioga, MG. Para a estimação dos parâmetros foi utilizado o Método dos Momentos e o Método da Máxima Verossimilhança. E em seguida foram comparados os resultados obtidos pelos dois métodos.

---

<sup>1</sup> Doutoranda em Recursos Hídricos em Sistemas Agrícolas, DEG/ UFLA, lili\_2126@hotmail.com

<sup>2</sup> Professor Adjunto, DEG/UFLA, crmello@deg.ufla.br

<sup>3</sup> Doutoranda em Recursos Hídricos em Sistemas Agrícolas, DEG/ UFLA, camilaalvarenga@uol.com.br

## MATERIAL E MÉTODOS

### Dados

Os dados analisados neste trabalho correspondem a vazão mínima diária ( $m^3 s^{-1}$ ) obtidos junto à Agência Nacional de Águas (ANA/HIDROWEB), no posto meteorológico da cidade de Ibertioga, MG. Os dados constituem séries históricas de vazões mínimas diárias anuais, de 1941 a 2002, sendo descartados os anos de 1954, 1961, 1962, 1987 e 1988, pois houve falha nesses anos. Isso resultou em uma série histórica de 57 anos. Confrontaram-se as frequências observadas para séries históricas de 57, 47, 37, 27 e 17 anos de vazões mínimas com as frequências estimadas pela Distribuição de Probabilidade Weibull. As estimativas dos parâmetros foram realizadas com base no Método dos Momentos e em algoritmos da Máxima Verossimilhança, conforme descrito em Haan (2002). Logo em seguida foi realizada a comparação entre os dois métodos de ajuste.

### Distribuição de Probabilidade

A distribuição Weibull tem sua Função de Densidade de Probabilidade (FDP) representada pela equação 1. Sendo  $\mu$  e  $\sigma$  definidos pelas equações 3 e 4.

$$\text{FCP: } P(X \leq x) = 1 - \exp(-\lambda \cdot x^\beta) \quad (1)$$

$$\mu = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2)$$

$$\sigma = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\beta}} \cdot \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2 \right] \quad (3)$$

A função logaritmo de verossimilhança da distribuição Weibull é a está representada na equação 4. Sendo  $\lambda$  e  $\beta$  definidos nas equações 5 e 6:

$$\text{FCP: } P(X \leq x) = 1 - \exp(-\lambda \cdot x^\beta) \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{n}{\lambda \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^\beta \cdot \ln(x_i)) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} \quad (6)$$

Utilizando o método de Newton-Raphson, por meio da ferramenta *Solver do Software EXCEL* obtém-se  $\beta$  e  $\lambda$ .

Para avaliar a adequabilidade da distribuição, utilizou-se o teste de  $\chi^2$  (Qui-Quadrado), com nível de 5% de significância, considerando-se como graus de liberdade o número de classes -1 (FERREIRA, 2005).

O teste de  $\chi^2$  foi aplicado para avaliar a precisão do ajuste das distribuições de probabilidades e sua consequente adequação, pois segundo Naghettini & Pinto (2007), este teste é um excelente indicador da precisão do ajuste por refletir o quadrado médio do erro. Para sua aplicação, busca-se agrupar os dados da série histórica em classes de frequência, acumulando-se os erros calculados entre a frequência observada na respectiva classe  $i$  ( $f_{oi}$ ) e a correspondente frequência teórica, calculada pela distribuição de probabilidades ajustada ( $f_{ti}$ ), ou seja:

$$\chi^2_{\text{calculado}} = \sum_{i=1}^n \frac{(f_{oi} - f_{ti})^2}{f_{ti}} \quad (7)$$

Para que a distribuição de probabilidade possa ser considerada adequada, o valor de  $\chi^2_{\text{calculado}}$  deve ser menor que o valor de  $\chi^2_{\text{tabelado}}$ , ou seja, a hipótese  $H_0$  do teste não é rejeitada, o que significa que as frequências observadas podem ser modeladas pela distribuição de probabilidade em questão.

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

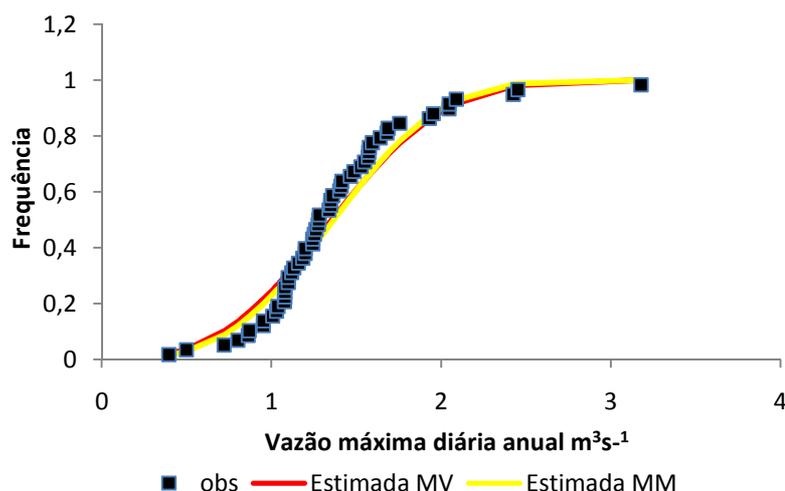
Na Tabela 1 são apresentados os valores de Qui-Quadrado calculados pela distribuição de probabilidade Weibull para todas as séries de vazões mínimas estudadas. Os modelos de Máxima Verossimilhança (MV) e o Método dos Momentos (MM) apresentaram adequacidade a todas as séries de vazões mínimas.

Tabela 1 - Valores de Qui-Quadrado calculados pela distribuição de probabilidade Weibull, com 5% de significância, para as séries de vazões mínimas para 57, 47, 37, 27 e 17 anos.

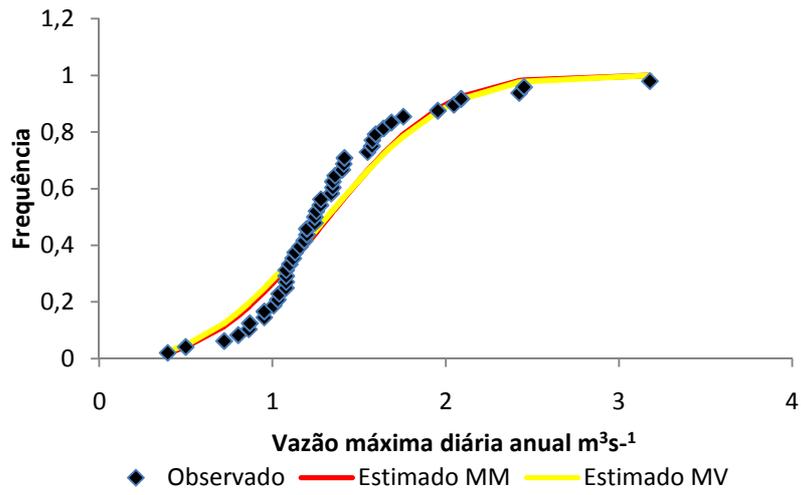
Série Histórica	$\chi^2$ MM	$\chi^2$ MV	$\chi^2_{\text{tabelado}}$	Diferença (%)
<b>57 anos</b>	2,28	2,61	5,99	12,59
<b>47 anos</b>	1,35	1,01	5,99	33,41
<b>37 anos</b>	1,95	1,84	5,99	5,73
<b>27 anos</b>	3,75	3,74	5,99	0,37
<b>17 anos</b>	4,18	4,01	5,99	4,35

A distribuição de probabilidade Weibull, para a série de 57 anos, no Método dos Momentos, foi a que melhor se ajustou a série de vazões mínimas. Entretanto, quando houve diminuição da série, o Método de Máxima Verossimilhança obteve maior precisão ao ajuste dos dados. O comportamento da distribuição de probabilidade Weibull contrasta com o trabalho desenvolvido por Martins e Stedinger (2001). Neste trabalho, Martins e Stedinger utilizaram dados de vazão e concluíram que há considerável ganho da distribuição de probabilidade aplicando a metodologia da Máxima Verossimilhança quando há aumento no tamanho da série histórica.

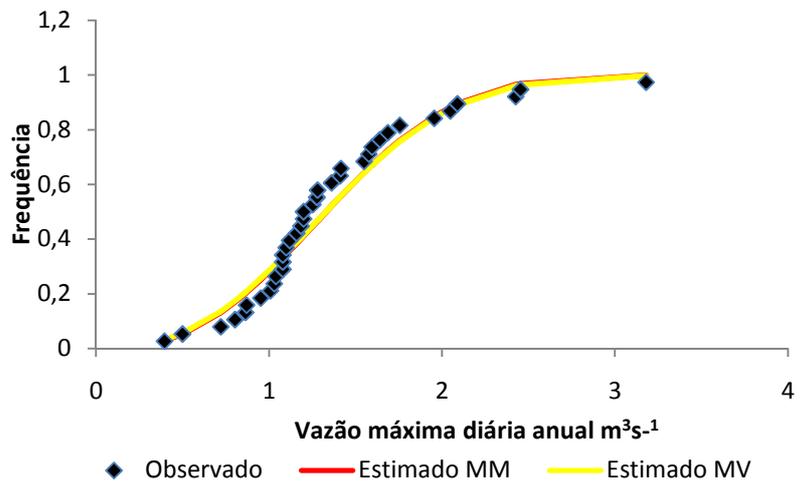
a)



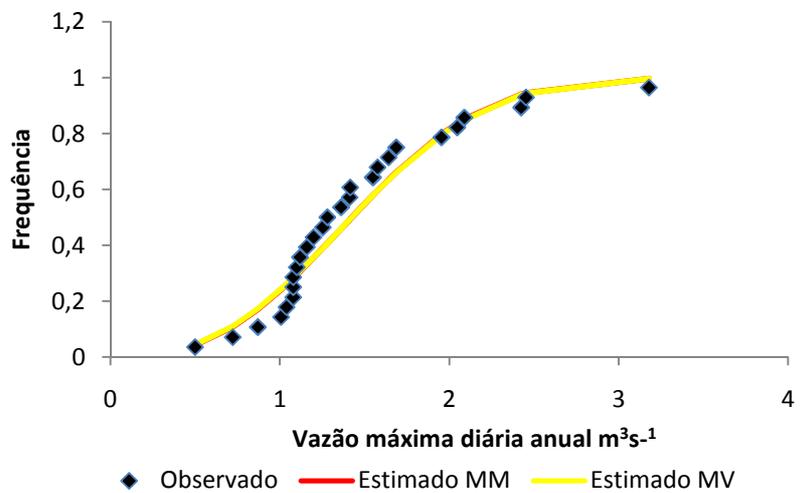
b)



c)



d)



e)

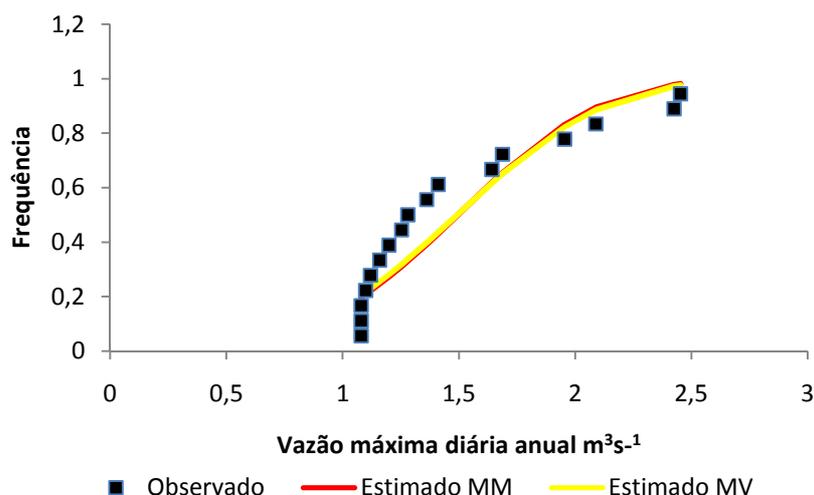


Figura 1 - Ajuste da distribuição de probabilidade Weibull às frequências observadas da série histórica de vazões mínimas de a) 57 anos, b) 47 anos, c) 37 anos, d) 27 anos e e) 17 anos, com base nos parâmetros estimados por Máxima Verossimilhança (MV) e Método dos Momentos (MM).

Nas Figuras 1a, 1b, 1c, 1d e 1e, são apresentados os ajustes da distribuição de probabilidade Weibull para série de vazões mínimas diárias anuais de 57, 47, 37, 27 e 17 anos respectivamente, as quais possibilitam uma melhor verificação da precisão dos ajustes das metodologias estudadas. Na Figura 1a, verificou-se melhor ajuste pelo Método dos Momentos, apesar da diferença nos valores de qui-quadrado, o Método de Máxima Verossimilhança também se ajustou aos dados. Para a série de 47 anos (Figura 1b), verificou que distribuição de probabilidade Weibull apresentou semelhança de ajuste aos dados pelas duas metodologias aplicadas. Essa distribuição apresentou o mesmo comportamento no ajuste pelos dois métodos, Figuras 1c, 1d e 1e, com uma leve superioridade no ajuste pelo Método da Máxima Verossimilhança. Os gráficos das Figuras 1a, 1b, 1c, 1d e 1e juntamente com os dados da Tabela 1, apresentaram o mesmo comportamento e demonstraram a melhor aderência das distribuições aos dados pelo Método da Máxima Verossimilhança. Segundo Durrans e Pitt (2004), a melhor precisão da metodologia da Máxima Verossimilhança deve-se a algumas propriedades estatísticas importantes, especialmente não tendenciosidade. De acordo com Clarke (2002), a Máxima Verossimilhança estima os parâmetros da distribuição de probabilidade que maximizam a probabilidade de ocorrência dos valores, ou seja, o conjunto de parâmetros que melhor ajustarão a distribuição de probabilidade às frequências observadas (Mello, et al., 2005).

## CONCLUSÃO

Constatou-se que o Método da Máxima Verossimilhança apresentou superioridade na estimativa dos parâmetros da distribuição de probabilidade Weibull. Também foi verificado que quando o tamanho da série histórica diminuiu, o método da Máxima Verossimilhança obteve maior precisão.

## REFERÊNCIAL BIBLIOGRÁFICO

ANA – AGENCIA NACIONAL DAS ÁGUAS. **Sistema de Informações Hidrológicas**. Disponível em <http://hidroweb.ana.gov.br/>. Acesso em 19 maio 2010.

CLARKE, R. T. Fitting and testing the significance of linear trends in Gumbel distributed data. **Hydrology and Earth System Sciences**, Katlenburg-Lindau, Alemanha, v.6, n. 1, p.17-24. Feb, 2002.

DURRANS, S. R.; PITT, R. Maximum likelihood estimators for coarsely resolved precipitation data. **Journal of Hydrologic Engineering**, Reston, v. 9, n.1, p.13-27, 2004.

**XIX CONGRESSO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA UFLA**  
**27 de setembro a 01 de outubro de 2010**

---

FERREIRA, D. F. **Estatística básica**. Lavras: UFLA, 2005. 654 p.

HAAN, C.T. **Statistical methods in hydrology**. 2.ed. Ames: The Iowa State University, 2002. 377p.

KATZ, R.W.; PARLANGE, M.B.; NAVEAU, P. Statistics of extremes in hydrology. **Advances in Water Resources**, Amsterdam, v.25, p.1287-1304, 2002.

MARTINS, E. S.; STEDINGER, J. R. Historical information in a generalized maximum likelihood framework with partial duration and annual maximum series. **Water Resources Research**, Washington, v. 37, n. 10, p.2559-2567, 2001.

Mello, C.R. de. et al. Métodos estimadores dos parâmetros da distribuição de Gumbel e sua influência em estudos hidrológicos de projeto. **Revista Irriga**, Botucatu, v. 10, n. 4, novembro-dezembro, 2005.

NAGHETTINI, M.; PINTO, E. J. A. **Hidrologia estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007. 552p.

QUEIROZ, M. M. F. de; CHAUDHRY, F. H. Análise de eventos hidrológicos extremos usando a distribuição GEV e momentos LH. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v.10, n.2, p.381-389, 2006.

SILVA, F. A. M.; ASSAD, E. D. Análise espaço temporal do potencial hídrico climático do estado de Goiás. In: SISTEMA DE INFORMAÇÕES GEOGRÁFICAS. Aplicações na Agricultura / editado por ASSAD, E. D.; SANO, E. E. 2.ed. . Brasília: Embrapa-SPI / Embrapa-CPAC, 1998. p. 273- 309.