COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DE VERIFICAÇÃO DO AJUSTE DA DISTRIBUIÇÃO GUMBEL A DADOS EXTREMOS

CARLOS JOSÉ DOS REIS[1], LUIZ ALBERTO BEIJO[2], GILBERTO RODRIGUES LISKA[3]

RESUMO

A distribuição Gumbel é muito aplicada a conjunto de dados com o intuito de se conduzir ações em detrimento a ocorrência de eventos extremos, ou seja, diante das informações correntes é possível avaliar riscos em diversos projetos, como os de engenharia, onde se trabalha constantemente com eventos máximos e mínimos. Por sua vez, ao se aplicar o modelo de probabilidade aos dados, trabalha-se com a hipótese de que o modelo escolhido possa representar adequadamente aquele conjunto de informações. Para isso, faz-se necessário o uso de testes de aderência, que irão indicar se a distribuição de probabilidade ajusta ou não a determinado conjunto de dados. Sabe-se que duas propriedades importantes são desejadas em teste: o poder e a taxa de erro tipo I. Dessa forma, objetivou-se no presente trabalho verificar a taxa de poder e a taxa de erro tipo I dos testes de Qui-Quadrado e Kolmogorov-Smirnov no ajuste da distribuição Gumbel via simulação. Pelos resultados, pode-se observar que o teste de Kolmogorov-Smirnov controla melhor a taxa de erro tipo I em relação ao teste de Qui-Quadrado. Por sua vez, para o poder o teste de Qui-Quadrado apresentou resultados mais satisfatórios quando comparado ao primeiro teste.

Palavras-chave: Kolmogorov-Smirnov, Qui-Quadrado, poder, taxa de erro I, valor extremo.

INTRODUÇÃO

A teoria de valores extremos, em especial a distribuição de valores extremos do tipo I, também conhecida como distribuição de Gumbel, distribuição tipo I de Fisher-Tippet, ou dupla exponencial, desenvolvida por Gumbel (1958), tem apresentado grande importância em vários campos da pesquisa e tem sido aplicada com grande freqüência na análise estatística de variáveis ligadas a fenômenos meteorológicos. Sua função de densidade de probabilidade tem a forma:

$$f(x;\beta,\alpha)=\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)-\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right]\right\} \qquad (1)$$

em que x é a variável aleatória associada a valores máximos do período e $-\infty < x < \infty$, β é denominado parâmetro de posição e $-\infty < \beta < \infty$, α o parâmetro de escala e $\alpha > 0$.

Segundo Beijo et al. (2003), os parâmetros α e β podem ser estimados pela metodologia da máxima verossimilhança.

Ao aplicar um modelo de probabilidade ao um conjunto de dados, trabalha-se com a hipótese que este modelo possa representar tal conjunto de dados. Na maioria dos casos a simples visualização dos dados amostrais de uma variável em um histograma de freqüência é insuficiente para inferir, entre as diversas funções de distribuição de probabilidade conhecidas, a que melhor se ajusta aos dados em estudo (Assis et al., 1996). Portanto, faz-se necessário o uso de teste de aderência para verificar se a distribuição de probabilidade em estudo pode ser aplicada ao conjunto de dados de uma variável em análise. Por sua vez os testes de aderência possuem propriedades importantes que variam de um para outro, como por exemplo, a taxa de poder e a taxa de erro tipo I. O poder de um teste e a capacidade

[1] Discente da Graduação em Matemática - Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG). carlosjreis17@yahoo.com
[2] Professor Adjunto II. Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG). luizbeijo@unifal-mg.edu.br.
[3] Discente da Graduação em Matemática - Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG). gilbertoliska@hotmail.com

que este possui em rejeitar uma hipótese, sendo esta verdadeiramente falsa. Já o erro tipo I, também denominado nível de significância do teste, consiste em rejeitar uma hipótese sendo ela verdadeira.

De acordo com Campos (1983), uma maneira de se verificar a aderência de uma distribuição a uma série de dados, pode ser feita por meio dos testes não paramétricos de Kolmogorov-Smirnov e Qui-Quadrado.

Costa Neto (1977), afirma que os testes de aderência admitem por hipótese, que a distribuição da variável de interesse na população seja descrita por um determinado modelo de distribuição de probabilidade. Quando se tem uma boa aderência e a amostra for razoavelmente grande, pode-se, em princípio, admitir que o modelo forneça uma boa idealização da distribuição populacional dos dados. Inversamente, a rejeição da hipótese, em um dado nível de significância, indica que o modelo testado é
inadequado para representar a distribuição da população.

O teste de Kolmogorov-Smirnov é bastante utilizado para análise de aderência de distribuição em estudo climático, contudo, conforme Catalunha et al. (2002), o seu nível de aprovação de uma distribuição sob teste é muito elevado, o que segundo o autor, gera uma certa insegurança em relação aos critérios do teste.

O teste de aderência de Qui-Quadrado apresenta limitações. Por exemplo, a freqüência de uma classe não pode ser inferior a cinco e os dados são agrupados em classes perdendo informações, o que não ocorre no teste de Kolmogorov-Smirnov, que além da possibilidade de ser realizado com os dados agrupados, pode também ser realizado com os dados isoladamente, sendo normalmente mais eficiente que o Qui-Quadrado em pequenas amostras, ou seja, menos de 30 observações (CAMPOS, 1983).

Com base no exposto acima, este trabalho teve por objetivo verificar o poder e a taxa de erro tipo I dos testes de Kolmogorov-Smirnov e Qui-Quadrado no ajuste da distribuição Gumbel, via simulação Monte Carlo, em diferentes tamanhos amostrais.

MATERIAL E MÉTODOS

Neste trabalho foi utilizada a simulação Monte Carlo para a geração das amostras de tamanhos 15, 20, 60 e 100 observações. Foram gerados dados das distribuições Gumbel (com parâmetros 40 e 10), Normal (com parâmetros 40 e 10), Weibull (com parâmetros 40, 10 e -0,3) e Uniforme (com parâmetros 0 e 100).

Na seqüência ajustou-se a distribuição Gumbel às séries de dados e aplicou-se os testes de Kolmogorov-Smirnov e Qui-Quadrado. As simulações provenientes da distribuição Gumbel foram utilizadas para determinação da taxa de erro tipo I dos testes e, as simulações das demais distribuições foram utilizadas para determinação do poder de cada teste.

Foram realizadas 1000 simulações para cada tamanho amostral, sendo registrada a proporção de vezes em que a hipótese nula foi aceita. Os níveis de significância (α) adotados neste trabalho foram 5%, 10% e 20%. As simulações e os testes foram realizados no software estatístico R 2.9.2 (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2009).

Campos (1983) descreve o teste de Kolmogorov-Smirnov e o teste de Qui-Quadrado, respectivamente, da seguinte forma:

O teste de Kolmogorov-Smirnov consiste em rejeitar a hipótese de adequação do ajuste, se a diferença máxima entre os valores observados e ajustados for superior ao crítico, para o nível de significância especificado. Para a realização do teste seguem-se os seguintes passos:

i) colocar a séries de dados em ordem ascendente;

ii) obter os valores de probabilidade da distribuição teórica $F(x_{(i)})$ e os valores de probabilidade da distribuição empírica $\hat{F}\left(x_{(i)}\right)$;

iii) calcular a estatística D através da seguinte expressão:

$$D = \sup\left|F\left(x_{(i)}\right) - \hat{F}\left(x_{(i)}\right)\right|,\ i = 1,...,n,; \tag{2}$$

iv) rejeitar a hipótese (H_o) se $D \geq D_{n,\alpha}$, sendo $D_{n,\alpha}$ o valor crítico para valores de n e um determinado nível de significância (α). Os valores de $D_{n,\alpha}$, são tabelados e podem ser consultados em Campos, 1983.

O teste de Qui-Quadrado fundamente-se na comparação das freqüências teóricas esperadas sob o modelo desejado (hipótese nula) com as freqüências observadas. Para isso, torna-se necessário agrupar os dados em classes (ou categorias) e calcular as freqüências esperadas sob o modelo desejado. Sua estatística é dada pela seguinte expressão:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(F_i - FE_i)^2}{FE_i}, \tag{3}$$

em que, F_i é a freqüência observada para a classe "i", FE_i é a freqüência esperada para classe "i". Assim a estatística (3) tem distribuição aproximadamente de Qui-quadrado com v=k-1 graus de liberdade sob a hipótese nula. Como regra de decisão, rejeita-se H_0 se $\chi_c^2 > \chi_{(v;\,\alpha)}^2$, em que, α é nível de significância desejado.

Uma observação que deve ser feita, de acordo com Campos (1983), é que o teste Qui-Quadrado não deve ser usado quando mais de 20% das freqüências esperadas for menor a 5 (cinco) na situação de k >2.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na Tabela 1 podemos verificar a taxa de erro tipo I dos testes de Qui-Quadrado e Kolmogorov-Smirnov para os tamanhos amostrais de 15, 20, 60 e 100. Observa-se que o teste de Kolmogorov-Smirnov apresentou resultados esperados para a taxa de erro tipo I, estando sempre abaixo do nível de significância, ou seja, 5%, 10% e 20% para todos tamanhos amostrais.

Tabela 1. Taxa de erro tipo I dos testes de Qui-Quadrado (QQ) e Kolmogorov-Smirnov (KS) para os tamanhos amostrais 15, 20, 60 e 100, com amostras da distribuição Gumbel.

	Tamanho amostral							
	15		20		60		100	
Testes	QQ	KS	QQ	KS	QQ	KS	QQ	KS
α=5%	NA	0,0000	NA	0,0000	0,0800	0,0000	0,0880	0,0010
α=10%	NA	0,0000	NA	0,0010	0,1520	0,0020	0,1650	0,0020
α=20%	NA	0,0180	NA	0,0230	0,3090	0,0150	0,3170	0,0220

Em relação ao teste de Qui-Quadrado para amostras menores que 30 observações, este teste apresenta limitações, ocasionando perda de informações e dessa forma para os tamanhos amostrais 15 e 20, tanto para a taxa de erro tipo I (Tabela 1) quanto para taxa de poder (Tabela 2) o teste não se aplica (NA). Observou-se que o teste de Qui-Quadrado esteve em todas as situações acima do nível de significância.

Na Tabela 2 são apresentadas as estimativas da taxa de poder dos testes avaliados. Quando os dados são provenientes de uma distribuição Normal ressalta-se uma superioridade do teste de Qui-Quadrado em relação ao teste de Kolmogorov-Smirnov, apresentando taxa de poder acima de 70% para o tamanho amostral 100, para o nível de significância de 20%.

Em relação às estimativas de amostras da distribuição Uniforme, novamente o teste de Qui-Quadrado apresenta melhor desempenho, chegando a partir do tamanho amostral 60 a apresentar 90% de rejeição a hipótese nula quando esta e falsa para todos níveis de significância, chegando a possuir alto desempenho para o poder quando o tamanho da amostra e 100.

Quando os dados provêm de uma distribuição Weibull ressalta-se novamente a superioridade de desempenho para o poder, do teste de Qui-Quadrado em comparação ao teste de Kolmogorov-Smirnov. Nesta tabela o teste apresenta poder acima de 46% para o tamanho amostral 100 em todos níveis de significância.

Tabela 2. Taxa de poder dos testes de Qui-Quadrado (QQ) e Kolmogorov-Smirnov (KS) para os tamanhos amostrais 15, 20, 60 e 100, com amostras das distribuições Normal, Uniforme e Weibull.

	Tamanho amostral							
	15		20		60		100	
	Normal							
Testes	QQ	KS	QQ	KS	QQ	KS	QQ	KS
α=5%	NA	0,0000	NA	0,0000	0,3050	0,0040	0,4280	0,0150
α=10%	NA	0,0010	NA	0,0000	0,4530	0,0170	0,5910	0,0760
α=20%	NA	0,0070	NA	0,0190	0,6550	0,1050	0,7580	0,2530
	Uniforme							
Testes	QQ	KS	QQ	KS	QQ	KS	QQ	KS
α=5%	NA	0,0000	NA	0,0000	0,9260	0,0000	0,9910	0,0080
α=10%	NA	0,0000	NA	0,0010	0,9680	0,0110	1,0000	0,0700
α=20%	NA	0,0130	NA	0,0150	0,9920	0,1020	1,0000	0,3850
	Weibull							
Testes	QQ	KS	QQ	KS	QQ	KS	QQ	KS
α=5%	NA	0,0000	NA	0,0000	0,3570	0,0050	0,4610	0,0130
α=10%	NA	0,0010	NA	0,0000	0,5150	0,0190	0,6140	0,0720
α=20%	NA	0,0110	NA	0,0150	0,7020	0,0860	0,7900	0,2540

É necessário se salientar também através dos resultados, que à medida que o tamanho amostral cresce de 60 a 100 para o erro tipo I (Tabela 1), o teste de Qui-Quadrado pouco se altera, enquanto que na mesma situação para esse teste nota-se um aumento para sua taxa de poder (Tabela 2). Ambos os testes passam a apresentar melhor desempenho para a taxa de poder com o aumento do tamanho da amostra, mas o teste de Kolmogorov-Smirnov ainda apresenta baixa taxa.

CONCLUSÕES

O teste de Kolmogorov-Smirnov mostrou controlar melhor a taxa de erro tipo I, estando em todas situações para os tamanhos amostrais abaixo dos níveis de significância estabelecidos. Por sua vez, o teste de Qui-Quadrado apresentou um melhor desempenho para taxa de poder quando comparado ao teste de Kolmogorov-Smirnov. Pode-se concluir também que o tamanho amostral exerceu influência sobre a taxa de poder, ou seja, com o aumento do tamanho da amostra há um aumento nessa taxa, o que fica evidenciado principalmente nos tamanhos amostrais 60 e 100.

REFERÊNCIAL BIBLIOGRÁFICO

ASSIS, F. N. de; ARRUDA, H. V. de; PEREIRA, A. R. **Aplicações de estatística à climatologia: teoria e prática**. Pelotas: UFPEL, 161p. 1996.

BEIJO, L. A. et al. Estudo da precipitação máxima em Jabotical (SP) pela distribuição de Gumbel utilizando dois métodos de estimação dos parâmetros. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v. 11, n.1, p.141-147, 2003.

CAMPOS, H**. Estatística não paramétrica**, 4. ed., Piracicaba: ESALQ/ USP, 349 p. 1983.

CATALUNHA, M.J. et al. Aplicação de cinco funções densidade de probabilidade a series de precipitação pluvial no estado de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v. 10, n. 1, p. 153-162, 2002.

COSTA NETO. P. L. O. **Estatística**. 1. ed. Sao Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1977.

GUMBEL, E. J. **Statistics of extremes**. New York:Columbia University, 375 p. 1958.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. R*: **A*** **language andenvironment for statisticalcomputing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.Rproject. org. 2009.