Assuntos Gerais

DIVISÃO DE EXPERIMENTAÇÃO E PESQUISAS

INSTITUTO AGRONOMICO

* * * *
*

S E M I N Á R I O S

D E

E S T A T Í S T I C A   A P L I C A D A

(1ª Série)

Secretaria da Agricultura do Estado de São Paulo

Departamento da Produção Vegetal

CAMPINAS

(Estado de São Paulo)

1949

Divisão de Experimentação e Pesquisas

INSTITUTO AGRONÔMICO

SEMINÁRIOS

DE

ESTATÍSTICA APLICADA

(1ª Série)

Secretaria da Agricultura do Estado de São Paulo

Departamento da Produção Vegetal

CAMPINAS

(Estado de São Paulo)

1949

PUBLICADO SOB OS AUSPÍCIOS DA
SOCIEDADE BRASILEIRA PARA
O PROGRESSO DA
CIÊNCIA

A P R E S E N T A Ç Ã O

C. A. Krug

Sem dúvida, um dos maiores entraves ao nosso progresso em todos os campos de atividades, reside na escassês de elementos técnicos especializados. Inúmeros são os problemas que se nos defrontam em todos os setores; se, de um lado faltam os meios materiais para resolvê-los, de outro é a ausência do fator homem, do indivíduo, capaz e especializado, que impede ou retarda a sua solução.

Assim sendo, pensamos que os nossos institutos de pesquisas, paralelamente às nossas faculdades, devem constituir-se também em órgãos formadores de técnicos, além de desempenhar a sua principal missão, que é a pesquisa e a investigação. Cada secção técnica, cada laboratório, cada estação experimental deve, pois, funcionar como verdadeira escola, sàbiamente orientada e conduzida.

O Instituto Agronômico do Estado, o tradicional estabelecimento de pesquisas agronômicas, também vem, em sua nova fase de atividades, cuidando sèriamente do aperfeiçoamento do seu corpo técnico. Reiniciaram-se as reuniões científicas mensais, nas quais fala um técnico sôbre a organização e trabalhos em andamento em sua secção e, a seguir, mais dois funcionários sorteados, sôbre assunto da sua livre escolha. Realizam-se seminários especializados nas secções técnicas e organizam-se programas de cursos rápidos sôbre matérias básicas de interêsse geral para a maioria dos seus engenheiros agrônomos.

A realização do primeiro "Seminário de Estatística", organizado pelo Eng. Agr. Constantino G. Fraga Jr., chefe da nossa Secção de Técnica Experimental e Cálculo, em colaboração com diversos especialistas no assunto da nossa Universidade e do Instituto Biológico, veio, pois, de encontro à iniciativa da atual diretoria do Instituto Agronômico, no sentido de oferecer aos seus funcionários amplas oportunidades de aperfeiçoamento técnico.

A estatística constitui, sem dúvida, matéria básica de grande interêsse à maioria dos nossos engenheiros agrônomos que se dedicam à experimentação de campo e à investigação nos laboratórios. Combatendo a rotina, é imprescindível

Í N D I C E

---ooOoo---

que se introduzam constantemente novas técnicas experimentais e sistemas de cálculo e interpretação dos dados a fim de se aumentar, cada vez mais, a eficiência dos ensaios e o valor dos resultados obtidos.

Graças à preciosa colaboração dos Professores Wilfred Leslie Stevens e Luiz Freitas Bueno, da Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas da Universidade de São Paulo e Agesilau Bittencourt do Instituto Biológico, constituiu o 1º Seminário de Estatística um verdadeiro sucesso; a frequência dos nossos técnicos foi assídua, tendo sido valiosas as discussões que se travaram sôbre os mais variados assuntos focalizados pelos principais conferencistas.

Dando à publicidade os trabalhos apresentados, a diretoria do Instituto Agronômico congratula-se com os realizadores dêste "Seminário" pelo êxito alcançado, fazendo os melhores votos para que os futuros conclaves dêsse gênero alcancem sucesso cada vêz maior, intensificando, cada vez mais, a preciosa e utilíssima colaboração que tão auspiciosamente agora se estabeleceu entre os especialistas pertencentes a vários estabelecimentos de ensino e de pesquisas de São Paulo.

o o o

SÚMULA DAS REUNIÕES

A realização dêste primeiro seminário de estatística teve por finalidade principal investigar a viabilidade de, em nosso meio, realizar reuniões dêste tipo e mesmo de outras mais especializadas. Esta é a razão pela qual seus organizadores escolheram para as conferências, assuntos de caráter bastante geral, podendo despertar o interêsse de um auditório maior que o constituído ùnicamente por aquêles que se dedicam principalmente à estatística e suas aplicações diretas.

Esperamos que, com a divulgação destas conferências, ainda mais se estenda o grupo daqueles que, entre nós, se utilizam da metodologia estatística e também dos que se sintam encorajados a contribuir com seus trabalhos para maior êxito das reuniões futuras.

A fim de não sobrecarregar demasiado as sessões dêste primeiro seminário, limitamos a seis o número de conferências. Estas se realizaram no Instituto Agronômico, em Campinas, nos dias 27 e 28 de maio de 1949, obedecendo ao seguinte programa:

Dia 27:

Pela manhã:

Presidente: Eng. Agr. C. A. Krug

1. Às 9,30 horas - Instalação e organização da mesa.

Presidente: Eng. Agr. A. Bittencourt
Secretário: Eng. Agr. A. Conagin

2. Às 10 horas - Construção e verificação de teorias. Pelo Prof. Luiz de Freitas Bueno
3. Às 11 horas - Princípios de planejamento de experiências. Pelo Eng. Agr. Constantino G. Fraga Júnior.

À tarde:

Presidente: Eng. Agr. E. A. Graner
Secretário: Prof. L. F. Bueno

1. Às 14 horas - Princípios de planejamento de experiências: Delineamentos fundamentais (Conclusão).
2. Às 15 horas - Desenvolvimentos modernos do delineamento de experimentos: Parte I. Pelo Prof. Wilfred Leslie Stevens
3. Às 16,30 horas - Provas de uniformidade da variância. Pelo Eng. Agr. Armando Conagin.

Dia 28

Pela manhã:

Presidente: Prof. L.F.Bueno
Secretário: Eng.Agr. C.G.Fraga Júnior

1. Às 9,30 horas - Desenvolvimentos modernos de delineamento de experimentos: Parte I (Conclusão)
2. Às 10,30 horas - O método dos probitos. Pelo Eng. Agr. Agesilau A. Bittencourt

À tarde:

Presidente: Dr. Adolfo M. Penha
Secretário: Eng.Agr. Vitória Rossetti

1. Às 14 horas - Planejamento estatístico. Pelo Prof. Luiz de Freitas Bueno
2. Às 15,30 horas - Recomendações e encerramento.

Na última sessão foi discutida a realização dos próximos seminários. Por proposta do Prof. L.F.Bueno, ficou assentado que a próxima reunião se realizasse no Instituto Biológico, em São Paulo. Êsse seminário deverá realizar-se em Setembro e ficaram incumbidos de sua organização o Eng.Agr. A.A. Bittencourt e Dr. A.M.Penha.

Também ficou resolvido que se daria a essa reunião uma maior divulgação, convidando para que participem da mesma outros técnicos não só dêste, como também de Estados vizinhos.

Os participantes do seminário decidiram, atendendo ao apêlo feito pela Sociedade Brasileira de Geografia e Estatística, cooperar na revisão do Dicionário de têrmos estatísticos. Para êsse fim, deverão êles apresentar sugestões sôbre terminologia, as quais serão coordenadas pelo Prof.Luiz de Freitas Bueno*, que as apresentará por ocasião da realização do próximo seminário.

o o o

*As sugestões deverão ser remetidas ao Prof. Luiz de Freitas Bueno, Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas da Universidade de São Paulo, à rua Dr. Vila Nova, 268. São Paulo.

PLANEJAMENTO DE LEVANTAMENTOS

Prof. Luiz de Freitas Bueno

1.0 Generalidades

.1 - Introdução - Sabemos que a análise estatística, quando aplicada a dados de observação, tem sempre em vista comprovar conclusões formuladas sôbre o evento a que correspondem, ou construir uma teoria sôbre o seu mecanismo. Esta última, por sua vez, deve ser comprovada pela experiência para que possa ser admitida como válida.

Consequentemente, tem sempre o pesquisador a necessidade de investigar a realidade para descobrir aspectos característicos e comprovar regularidades.

O conjunto de operações feitas para se obter um balanço da realidade, constitui um levantamento.

.2 - Tipos de levantamentos - Quando um levantamento abrange a totalidade dos componentes de uma população, êle é dito completo. Nem sempre, porém, isto é possível. Há situações em que só é possível e outras mais conveniente, o levantamento de uma parte da população. Neste caso, o levantamento é incompleto, feito por amostras. O tipo de levantamento a ser utilizado em cada caso depende da natureza e das condições do mesmo, cabendo ao técnico decidir na sua escolha.

Os levantamentos completos, apesar de parecer conduzirem a resultados mais exatos, apresentam inconvenientes sérios, tais como:

a - os seus resultados podem ser dados numa ocasião em que não mais sejam úteis;
b - a situação da realidade pode ser sofrido já transformações fundamentais quando forem conhecidos os resultados do levantamento.

A amostragem, por outro lado, apresenta as vantagens seguintes:

I - seus resultados são obtidos prontamente;
II - o custo das operações do levantamento é reduzido;
III - permite calcular de antemão a probabilidade de diferenças entre os resultados obtidos e esperados.

De um modo geral, a amostragem fornece dados fidedígnos, oportunos e baratos.

.3 - Substituição dos levantamentos completos - Quando é possível e conveniente a substituição de um levantamento completo por uma amostragem, advêm daí vantagens, tais como:

a - menor duração nas operações de coleta;
b - menor tempo nos trabalhos de elaboração e de publicação dos resultados;
c - dados mais fidedígnos.

Quando o levantamento completo é o mais aconselhável, há ainda vantagens no uso concomitante da amostragem. Com isso:

I - torna-se possível a verificação por amostras das distintas operações do levantamento;
II - os resultados do levantamento podem ser adiantados, apurando-se as amostras em primeiro lugar, de modo a facilitar a solução dos problemas mais urgentes;
III - as amostras podem fornecer informações complementares;
IV - muitos testes relativos à preparação e a operações do levantamento podem ser feitos.

2.0 Técnica dos levantamentos

.1 - O planejamento - A nosso ver, o planejamento de um levantamento estatístico consiste no projeto de tôdas as operações que êle envolve. Todo o sucesso de um levantamento reside, em grande parte, no seu planejamento.

As operações envolvidas por um levantamento podem ser sintetizadas nas seguintes designações:

a - programa;
b - plano de ação;
c - execução: coleta, apuração, apresentação
d - contrôle das operações;
e - conclusões.

a - O programa

.2 - Conceito - O programa é quem vai indicar o objeto do levantamento. Êle deve ser elaborado de tal modo, que deixe bem claro o que se tem em vista com o levantamento, o que êle abrange e os que nêle são envolvidos.

.3 - Elementos - O programa deve incluir os seguintes elementos:

1 - seu objeto;
2 - as informações que se fazem necessárias para se conseguir o objeto;
3 - a importância apresentada por essas informações;
4 - o tempo aproximado em que as informações são necessárias;
5 - a exatidão requerida dessas informações.

II - <u>População a que se referem as finalidades</u> - Compreende os seguintes itens:

1 - região abrangida pelo levantamento;
2 - fontes de informação;
3 - meios de serem obtidas as informações;
4 - projeto preliminar de questionário

III - <u>Tipo de levantamento a ser utilizado</u> - Devemos, agora, escolher a forma pela qual o levantamento vai ser feito. Tratando-se de amostragem, devemos:

1 - dimensionar a amostra;
2 - projetar a amostra;
3 - estabelecer as fórmulas e fixar a precisão desejada nas estimativas.

IV - <u>Projeto do Questionário</u> - É uma das partes de maior responsabilidade do programa. O questionário deve ser elaborado de tal modo que o informante compreenda imediatamente as perguntas que lhe são feitas e que as questões nêle contidas possam ser por êle respondidas. O projeto do questionário envolve:

1 - redação;
2 - formato e impressão;
3 - forma de recepção.

V - <u>Orçamento</u> - É de vital importância para a execução total do levantamento, visto que dêle depende a providência dos meios financeiros necessários. No orçamento devemos prever uns tantos por cento a mais para nos precavermos quanto aos imprevistos durante a execução de qualquer uma das operações do trabalho pròpriamente dito.

b - <u>O plano de ação</u>

.4 - <u>Conceito</u> - O plano de ação de um levantamento consiste no estabelecimento e coordenação de todos os elementos e meios necessários à integral realização do levantamento. Êle compreende:

1 - instalações;
2 - máquinas;
3 - fichários e arquivos;
4 - impressos;
5 - recursos econômicos necessários.

II - Meios individuais - Compreende os dirigentes e os executores do levantamento. Dêsses indivíduos são exigidas diferentes qualidades. Precisamos recrutá-los entre indivíduos que

Saibam Queiram e Possam

fazer os trabalhos que lhes forem atribuídos.

III - Meios morais - Sob esta designação queremos indicar a propaganda não só no sentido de dar conhecimento como no de dar proteção ao desenvolvimento das operações do levantamento. A propaganda visa combater, principalmente:

1 - má fé 2 - ignorância 3 - negligência;
4 - má vontade 5 - medo no aumento nos impostos;
6 - receio de alistamento militar;
7 - receio de divulgação dos dados;
8 - sentimentos feridos.

Êsses são, aliás, os elementos que contribuem para o fracasso de um levantamento. A propaganda dirige-se ao informante, a fim de combater êsses defeitos que êle apresenta. Muitos são os meios de exercê-la. Dentre êles, tem-se: Jornais, revistas, rádio, conferências, cartazes, cartões postais, selos comemorativos, brindes, etc. (levantamentos de cunho particular).

Quando o levantamento é de caráter público, a propaganda deve mobilizar certa classe de indivíduos, tais como: ministros religiosos, jornalistas, professores, etc.

IV - Ensaio - Um ensaio nunca deve faltar entre as operações que precedem à execução de um levantamento. Com êle tem-se em vista:

1 - exercitar o pessoal que vai trabalhar no levantamento;
2 - o treinamento dos informantes;
3 - conhecer a adaptação dos questionários aos informantes;
4 - descobrir falhas no planejamento.

c - A execução

.5 - Conceito - A execução consiste de operações necessá - rias para a obtenção das informações que necessitamos. A e xecução consiste, pois, de três operações muito importantes quanto à sua parte técnica: coleta, apuração e apresentação dos resultados.

I - A coleta - A coleta consiste no que mais pròpriamente chamaríamos levantamento das unidades estatísticas (cada informação). O seu instrumento é o questionário. Ela pode ser feita:

a - por questionário enviado;
b - por questionário apresentado;
c - por interrogatório;
d - por questionário e interrogatório.

Cada um dêsses processos de coleta tem suas vantagens e inconvenientes. A escolha será adequada em cada caso, cabendo ao técnico decidir sôbre ela. Esta escolha depende:

I - da natureza do levantamento;
II - da precisão desejada;
III - do tempo disponível;
IV - da qualidade do informante;
V - dos recursos disponíveis;
VI - dos meios de comunicação e locomoção.

Os movimentos necessários ao exercício da coleta decorrem do processo utilizado para a mesma. Assim, para o caso de questionário enviado compreende:

1 - remessa do questionário;
2 - recebimento do questionário;
3 - contrôle dessas operações.

II - Crítica - A crítica é uma operação que, invariàvelmente, deve presceder à apuração. Nela os questionários são revistos, numerados e completados, quando possível.

III - Coodificação - A coodificação consiste em transformar em números as respostas dos questionários, através de um código estabelecido especialmente. No caso de a apuração ser mecânica, ela é obrigatória.

IV - A apuração - Consiste a apuração da contagem das unidades estatísticas que entram em cada uma das classes de uma classificação de antemão estabelecida. Esta operação é feita:

a - manualmente, ou
b - mecânicamente,

sendo que a escolha entre um e outro processo depende: 1) da quantidade de questionários a apurar, 2) da quantidade de questões que o questionário contém, 3) do tempo disponível para a apuração e 4) dos recursos financeiros.

V - Apresentação - Ela nos fornece os dados obtidos através de uma disposição adequada e sistemática. Compreende as seguintes formas:

a - apresentação tabular;
b - apresentação gráfica;
c - apresentação textual.

d - O contrôle das operações

.6 - Conceito - De um planejamento bem orientado, deve fazer parte o projeto dos meios capazes de controlar as operações envolvidas no levantamento.

O contrôle permite não só sabermos se a execução está sendo feita segundo os planos elaborados, como também fornece indicações com relação à adaptação dos planos projetados à realidade. O plano de contrôle deve abranger:

a - pessoal;
b - administração;
c - relatórios de resultados parciais e finais.

Em linhas gerais, é isto o que tínhamos a dizer com respeito ao planejamento de levantamentos estatísticos. Para concluir o nosso trabalho, queremos abordar a questão do planejamento de uma amostra, a fim de fazermos com que tudo o que se disse possa também se aplicar no caso de amostragens.

3.0 Levantamento por amostras

.1 - Introdução - Cada dia que passa mais frequentes se vão tornando os levantamentos por amostras. Mesmo no setor demográfico, os tradicionais levantamentos totais, realizados periòdicamente, vão assumindo o papel de operação de verificação das amostragens entre êles realizadas.

As pesquisas de mercado e de opinião pública, por outro lado, constituem campos de grande aplicação, onde a amostragem já dominou. Ademais, êsses tipos de levantamentos têm servido para mais uma vez comprovar a eficácia dos levantamentos parciais.

Convém lembrar, também, que com a amostragem o que se obtém são meras estimativas daqueles parâmetros determinados para a população através dos levantamentos completos. A vantagem do uso de amostras reside, principalmente, em permitir a fixação do grau de confiança que podemos depositar naquelas estimativas.

De modo geral, as precisões obtidas com os levantamentos por amostras são suficientes para permitir, com certa segurança, decidir sôbre as hipóteses relativas a uma população que se quer pôr em prova.

Tôda a técnica que desenvolvemos para os levantamentos em geral, aplica-se, indistintamente, aos dois tipos. Na amostragem, porém, existem operações características que passaremos, em linhas gerais, a analisar.

.2 - Operações - Na amostragem, temos que distinguir as seguintes operações que lhe são próprias:

a - o projeto da amostra;
b - o estabelecimento das fórmulas para as estimativas.

O projeto de uma amostra compreende: 1) dimensionamento; 2) seleção. Já o dimensionamento em lugar de ser um problema de técnica, é um problema de cálculo. A seleção, como sabemos, pode ser: ao acaso, sistemàticamente, e por estratificação.

As fórmulas para a estimação dos parâmetros variam com o método de estimação indicado e os erros, de acôrdo com o tipo de amostragem.

.3 - Dimensionamento pela Estatística "t" - Utilizando-se a Estatística "t", podemos estabelecer uma fórmula para dimensionar amostras em função de variância da população, do nível de significância adotado e da diferença máxima tolerável entre a estimativa e o valor verdadeiro. Obtêm-se, assim, as expressões:

$$n = \frac{t^2_\alpha}{\lambda^2}\sigma^2$$

$$n_j = \frac{m_j}{1 + \frac{\lambda^2 (m_j - 1)}{t^2_\alpha \sigma_j^2}}$$

conforme seja a população: infinita ou finita.

No caso de se pretender saber, por exemplo, quantos elementos devem ser selecionados de uma população normal (infinita) com $\mu = 30$, $\sigma^2 = 4$ para que com 90% de segurança a média da amostra difira no máximo de 5% da média da população tem-se:

$$n = \left(\frac{1.28}{1.5}\right)^2 . 4 = 2$$

isto é, deve ser selecionada uma amostra de 2 elementos.

.4 - Dimensionamento em extratos - A estratificação é um dos processos que conduzem à boas estimativas, visto permitir que a amostra se componha de elementos representativos de todos os aspectos da população.

Sejam k extratos $E_1, E_2, \ldots E_k$ com $m_1, m_2, \ldots m_k$ elementos, respectivamente. Um ótimo critério de dimensionamento será escolher em cada extrato n_i elementos tais que

$$\frac{n_i}{m_i} = \frac{m_i}{N} \qquad i = 1,2, \ldots, k$$

onde $N = \sum_{i=1}^{K} m_i$. Daí tira-se

$$n_i = \frac{m_i^2}{N} \qquad e \qquad n = \sum_{i=1}^{K} n_i$$

Referência bibliográfica

1. Bueno, Luiz de Freitas - Considerações sôbre o planejamento Estatístico. Publ.nº 19 do Inst.de Administração da Fac.de Cien.Econ.e Admin.da Univ. de S.Paulo. S.Paulo, abril de 1948.

2. Madow, Willian, G. - Porque Usamos Amostras. Vol.27 da Rev.Brasileira de Estatística. Ano VII. Rio de Janeiro, 1947.

3. Dieulefait, C.E. - Sobre la Teoria de las muestras. 1ª parte. Revista da Facultad de Ciencias Economicas Comerciales y Politicas. 4ª série, tomo III nº 1. Rosario, Rep.Arg. 1944.

4. Kenney, J.F.- Mathematics of Statistics. D. Van Nostrand Co. N.York, 1939.

CONSTRUÇÃO E VERIFICAÇÃO DE TEORIAS

Prof. Luiz de Freitas Bueno

1.0 Generalidades

.1 - Introdução - Das inúmeras tentativas que têm sido feitas para dar uma definição à Estatística, foi R.A.Fisher que, a meu ver, mais se aproximou da realidade com a definição apresentada em seu "Statistical Methods".

De fato, os métodos que a Estatística utiliza para estudar os denominados dados de observação não passam de métodos matemáticos.

Dos conceitos básicos da Estatística, dois são fundamentais: o de população e o de amostra. A palavra população aqui empregada tem um sentido mais geral que o demográfico, (seres humanos vivendo em união política). População para a Estatística significa um conjunto de seres animados ou inanimados portadores, de, pelo menos, uma característica comum. Como exemplo, tem-se a população gerada pela repetição de um experimento, a população gerada pela repetição de uma medida, a população dos insetos de determinada família, etc.

Tais populações podem ser: a) quanto à sua extensão, finitas ou infinitas; b) quanto à sua existência, reais ou hipotéticas; c) quanto à continuidade, contínuas ou descontínuas.

O segundo conceito fundamental é o de amostra. Por amostra entendemos uma porção de elementos de uma população, dela selecionada por um processo adequado. O número de elementos de uma população que entra em uma sua amostra, constitui a sua extensão.

.2 - Objeto da Estatística - De um modo geral, o objetivo fundamental da Estatística é o de obter inferências válidas para uma população, a partir de amostras dela selecionadas. Isto é fácil de ser justificado, lembrando-se que os dados estatísticos de que na realidade dispomos, não passam de mera amostra. Na sua análise, a Estatística visa sempre fazer inferências relativas à população que originou a amostra.

.3 - Problemas Básicos - No estudo dos dados de observação, tem a Estatística em vista um dos problemas seguintes

a) construção de Teorias
b) verificação de Teorias

É fácil verificar que os problemas de que, comumente, temos conhecimento de solução através da Estatística, estão enquadrados entre os que acima enumeramos. De fato, os dados estatísticos obtidos na observação, qualquer que seja o campo científico considerado, o são visando sempre comprovar uma teoria já elaborada, ou construir uma nova teoria, capaz de explanar o mecanismo do evento que lhes deu origem.

2.0 Construção de Teorias

.1 - Conceito - A construção de uma teoria consiste em construir um modêlo capaz de descrever o mecanismo de um dado evento suscetível de observação. Na prática, dispõe-se de uma série de dados relativos à observação do evento e procura-se descrever a população de onde êles provieram.

O problema da explicação do mecanismo de um evento surgiu em sua primeira aproximação como um problema de pesquisa de leis causais.

Se x, y, ..., t são causas de um evento cuja observação conduz a uma grandeza Z, a descrição do evento pode ser feita através da relação funcional

$$Z = \phi\ (x, y, \ldots t)$$

envolvendo, naturalmente, um certo número de parâmetros intimamente ligados à natureza da população dos resultados possíveis do evento.

O desconhecimento de grande número de causas x,y, ... t, e a impossibilidade de muitas delas serem apanhadas pela observação, fêz com que procurássemos tomar outro rumo no problema da pesquisa dessas leis.

Assim, podemos tomar uma série de valores observados de Z e pensar na construção de uma relação do tipo

$$\phi\ (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

capaz de descrever as variações apresentadas pelo efeito Z, independentemente dos seus antecedentes causais. Essa relação nada mais é do que um modêlo do comportamento do nosso evento. Constitui ela uma Teoria relativa ao evento.

.2 - Base empírica - Vejamos, agora, as bases empíricas dêsse tipo de construção de modêlo apresentado. Seja

X um efeito observável e devido a uma série de causas. Podemos sempre supor que tais antecedentes pertencem a um do grupos seguintes:

a - causas permanentes;
b - causas acidentais

onde as primeiras representam aquêles antecedentes de comportamento sistemático e cujo efeito, puro, é suscetível de ser descrito por uma relação funcional do tipo exato. Já o segundo grupo de causas representa os antecedentes acidentais, aos quais podemos associar um elemento de probabilidade, isto é, um certo gráu de crença na sua ação direta na manifestação do efeito, desta ou daquela maneira.

Podemos, simbòlicamente, dividir o efeito X em duas parcelas

$$X = X_s + X_a$$

onde X_s representa a parte sistemática e X_a a parte acidental da variável observada.

Para um conjunto observado ou amostra (x_n) podemos ter a representação simbólica

$$(x_n) = nX_s + \Sigma X_a$$

A experiência demonstra, no entanto, que com o aumento do número n de observações o conjunto (x_n) tende a evidenciar uma certa regularidade, com a compensação dos componentes acidentais da variável.

Podemos, então, supor que tal regularidade existe na população dos X e procurar descrever êste estado de equilíbrio. Esta descrição nada mais é do que uma verdadeira teoria empírica e matemática do evento considerado.

Podemos concluir que sempre que num dado fenômeno observável encontramos a evidência de uma regularidade confirmada, podemos tentar a construção de uma teoria matemático-empírica capaz de descrever o seu mecanismo. Tal teoria, convém fixar, será sempre um modêlo baseado no comportamento do corpo de dados constituído pela nossa amostra. Para que ela possa ser admitida como válida impõe-se-lhe a condição de ser comprovada pela experiência. Tal verificação recai no segundo problema por nós enumerado na análise de dados de observação, tal seja o da verificação das teorias.

.3 - <u>Tipos de Modêlos</u> - Os modelos construídos para des crever um certo evento podem ser tomados como:

a - Modelos Exatos - quando só consideram a componente. sistemática da variável. Teríamos, assim, uma função do tipo

$$\phi\ (X\ ;\ \alpha)$$

onde α são parâmetros ligados às características da população.

b - Modelos Estocásticos - quando considerem as duas componentes da variável. Assim, teríamos

$$\Omega(x_s\ ;\ \alpha)\ \ o\ \ \omega(x_a\ ;\ \beta)$$

onde o símbolo o indica uma operação racional, α são parâmetros ligados à população dos X_s e β parâmetros à população dos X_a.

.4 - Fases da Construção de Modelos - A construção dos modelos compreende as seguintes fases:

a - apanhado dos aspectos característicos da realidade. Constatação de regularidades;

b - escolha de uma função para descrever essa regularidade;

c - isolamento do efeito acidental e sua descrição (quando é o caso de modêlo estocástico);

d - estimação dos parâmetros envolvidos no modêlo;

e - comprovação experimental do modêlo construído.

Infelizmente, a nossa preocupação de conjunto, em virtude da exiguidade do tempo por nós limitado para não nos tornarmos massantes, não permite uma análise acurada dessas fases. Entre elas tomaremos para tratamento só a última que pertence aos objetivos iniciais do nosso tema.

3.0 Verificação de Teorias

.1 - Introdução - Nos mais variados campos da atividade científica, tem o pesquisador necessidade de julgar, com base na realidade, a validade de uma teoria tomada como capaz de descrever o mecanismo de um evento. Tal teoria pode surgir da escolha entre modelos conhecidos ou da construção de um modêlo especial para cada caso.

O problema fundamental é o de submeter à comprovação experimental, a validade do modêlo como teoria descritiva de um certo evento. É êle um problema chave da Estatística dita Indutiva. A sua solução pode conduzir às conclusões seguintes:

a - aceitar a hipótese de o modêlo satisfazer a descrição para que foi proposto;

b - regeitar a hipótese de o modêlo descrever o evento.

Tanto uma como outra das conclusões apontadas e às quais podemos chegar, são inferidas do gráu de concordância encontrado entre a formulação teórica (modêlo) e a realidade observada (amostra).

Parece vaga, à primeira vista, a questão do gráu de concordância entre o modêlo e a realidade. Mas, a introdução de uma base probabilística na nossa análise permite delimitar a aparente indeterminação.

.2 - <u>Os dados do Problema</u> - Fàcilmente compreende-se que no problema da verificação de teorias os dados apresentados para a solução podem ser enumerados do seguinte modo:

a - teoria a ser posta em prova;

b - dados relativos ao comportamento da realidade.

A teoria a ser posta em prova, vimos, pode ser tomada entre modelos conhecidos ou especialmente construídos. Os dados relativos ao comportamento da realidade devem ser obtidos da observação direta do evento através de um experimento. Êste constitui, para o pesquisador, a situação de observar fatos, controlar fatôres, investigar constâncias e relações características, etc.

De um experimento exige-se que:

I - êle se tenha conduzido na direção das tendências naturais do evento;

II - suas feições características possam ser apanhadas;

III - a sequência de operações envolvidas em sua realização obedeça rigorosamente a um delineamento especialmente projetado.

.3 - <u>Delineamento</u> - É imprescindível, para a verificação de uma teoria através da realidade, que o experimento sôbre o qual vamos verificá-la seja bem delineado. Devemos lembrar que nem sempre os dados de que se dispõe de u evento são suficientes para aceitar ou rejeitar uma hipótese sôbre êle feita. De um modo geral, um bom delineamento leva a conclusões decisivas.

Uma teoria verificada através de um experimento é dita <u>válida</u> e adquire o caráter de prática.

Com o delineamento tem-se em vista:

a - conseguir um apanhado o mais perfeito e exato possíveis da realidade;

b - fazer com que os dados obtidos do experimento nos possam levar a conclusões decisivas;

c - evitar a introdução de vícios na observação, de modo a sermos levados a conclusões deturpadas;

d - delimitar rigidamente o campo e as condições do experimento;

e - evitar os erros da observação;

f - permitir o contrôle do experimento.

.4 - <u>Teste de Significância</u> - A situação de analisar uma série de dados para decidir sôbre uma ou mais conclusões estabelecidas para a **população** de onde êsses dados provêm, levam-nos a um <u>teste de significância</u>.

Um teste de significância pode mostrar:

a - que as conclusões estabelecidas de antemão para a população conduzem a valores numéricos que diferem significantemente daqueles observados, rejeitando, assim, aquelas conclusões;

b - que as conclusões estabelecidas de antemão conduzem a valores numéricos, cujas diferenças aos valores observados não são significantes, aceitando, assim, aquelas conclusões ou hipótese.

A significância das diferenças entre valores observados e calculados é o elemento probabilístico introduzido no nosso raciocínio indutivo. Ela exprime o gráu de incerteza com que fazemos a inferência das características da população, a partir da amostra.

Se x_1, x_2, ... x_n são valores observados e se f (t) é um modêlo capaz de descrevê-los em função de uma variável t, devido aos antecedentes acidentais de x, haverá sempre uma diferença entre x_i e $f(t_i)$, seja ε um elemento aleatório ao qual corresponde uma distribuição $d(\varepsilon)$.

Tal distribuição inclui todos os valores possíveis de ε, tanto os devidos a diferenças provenientes do acaso como os devidos a diferenças provenientes de causas intrínsecas. Evidentemente, interessam-nos sòmente aquêles valores de ε que são meramente devidos ao acaso e para isso é necessário limitarmos na distribuição $d(\varepsilon)$ o intervalo de variação de ε, de modo que nêle sejam incluídos sòmente os valores de ε devidos ao acaso.

Tem-se assim um intervalo dado pelos limites

$$I_1 = \bar{\varepsilon} - t_\alpha \sigma_\varepsilon$$
$$I_2 = \bar{\varepsilon} + t_\alpha \sigma_\varepsilon$$

e tal que

$$\alpha = P\left[I_1 \leq \varepsilon \leq I_2 \right]$$

Fixado, então, um certo α_0, podemos calcular a probabilidade de que o nosso ε calculado difira de um certo ε_0 fixado. Seja

$$\alpha_0 = P\left[\varepsilon \quad \varepsilon_0 \right]$$

Se $\alpha \leq \alpha_0$ conclui-se que a diferença entre ε e ε_0 é significante ao nível de significância α_0. Isto é, essa diferença não é devida exclusivamente ao acaso e nossa hipótese de f(t) ser um modêlo capaz de descrever os nossos dados deve ser rejeitada ao nível de α% ou ainda com uma segurança de $(1 - \alpha).100$%. Se $\alpha_0 \leq \alpha$, será aceita com o mesmo gráu de segurança.

.5 - <u>Construção de um Teste</u> - Já vimos que a análise estatística tem sempre de resolver o problema da descriminação entre duas (ou mais) hipóteses alternativas e relativas aos fatôres determinantes de um evento. Tal problema é resolvido com o auxílio de um teste de significância. O processo da construção dos testes de significância compreonde:

a - definição da hipótese;

b - escolha do critério o mais aconselhável para testar a hipótese definida;

c - referência do critério escolhido à observação, constituída pela nossa amostra;

d - finalmente, julgar se o valor obtido com a aplicação do critério à amostra é excepcional ou não. Se não o fôr, aceita-se a hipótese. Caso contrário, conclui-se pela sua rejeição ou aceitação das hipóteses alternativas.

Isto é o que em linhas gerais podemos dizer sôbre a verificação das teorias através dos testes de significância. Tais testes aplicam-se a outros tipos de raciocínios além do aqui exposto. A nossa finalidade foi a de encarar os testes sob o ponto de vista de verificação de uma teoria, ùnicamente.

Passaremos agora à parte final dessa nossa dissertação, encarando a utilidade dos modelos construídos e admitidos como válidos na descrição da observação (testados).

4.0 Utilidade dos modelos

Uma teoria matemática ou modêlo, construída para descrever um conjunto de dados observados presta-se aos fins de Descrição, Análise e de Previsão.

A Descrição é interpretada no sentido de o modêlo condensar em si propriedades do evento para o qual foi construído, no menor número possível de características descritivas. Devemos lembrar que os parâmetros envolvidos no modêlo estão intimamente ligados a fatôres intrínsecos e extrínsecos da população e constituem excelentes elementos informativos e descritivos dessa população.

A Análise consiste na utilização do modêlo para determinar as características da população. Compreende ela o problema da análise das causas através da utilização dos Testes de Significância.

A Previsão consiste em utilizar o modêlo para prever valores da variável observada, previsão essa feita sob certo gráu de crença, visto que não se pode nunca pensar em previsões exatas para fenômenos onde atuam, às vêzes, com grande intensidade, fatôres devidos ao acaso.

As previsões relativas a êsses eventos são sempre incertas e tão menos exatas quanto maior o gráu de certeza que se queira a ela associar.

Referência bibliográfica

1. Cramer, H. - Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press. Princeton, 1946.

2. Fisher, R.A. - Statistical Methods for Research workers. Oliver and Boyd. London, 1946.

3. Fisher, R.A. - The Design of Experiments. Oliver and Boyd. London, 1942.

4. Kenney, J.F. - Mathematics of Statistics. D. Van Mostrand Co. N. York. 1939.

5. Bueno, L.F. - Análise Estatística de Dados Econômicos. Alguns Aspectos. Boletim do Departamento Estadual de Estatística, vol. IX, nº 4. S.Paulo. 1947.

6. Bueno, L.F. - Considerações sôbre o Planejamento Estatístico. Publ.do Inst.de Adm. da Fac.de Cienc. Econ.e Adm. da Univ.de S.Paulo. S.Paulo. 1948.

PRINCÍPIOS DE PLANEJAMENTO DE EXPERIÊNCIAS

Delineamentos fundamentais*

C. G. Fraga Júnior

A - Blocos ao acaso

Para, em agricultura, instalarmos uma experiência de campo, necessitamos de canteiros, em número igual à soma das repetições que tivermos para cada um dos tratamentos, Constitui regra geral o considerar, sempre que possível, um mesmo número de repetições para todos os tratamentos e êsse critério será adotado nesta exposição.

Se, ao instalarmos a experiência, considerarmos todos os canteiros que a constituem, como formando grupos ou blocos de tantos canteiros quantos os tratamentos e se sortearmos (sem repetição) todos os tratamentos pelos canteiros em um mesmo bloco, obteremos a disposição experimental denominada blocos ao acaso. O processo descrito conduz a uma disposição em que cada tratamento é representado em todos os blocos e uma única vez em cada um dêles.

O grupamento das diversas repetições em blocos, é prática bastante antiga em agricultura, muito utilizada no período em que as disposições sistemáticas predominavam. Sua adoção não se fêz por simples questão de maior ou menor elegância do plano experimental, mas é devida a vantagens bastante grandes, que consideraremos, primeiramente de uma maneira geral para mais adiante analisá-las com maior vagar:

1 - Exatidão - Numa experiência, as produções dos canteiros diferem umas das outras. Dizemos que existe uma variação na produção dêsses canteiros e consideramos essa variação como devida a três causas diversas:

*Êste trabalho tem a finalidade de servir de introdução aos delineamentos experimentais apresentados pelo Prof. W.L. Stevens sob o título "Desenvolvimentos modernos do delineamento de experimentos". A exposição feita seguiu em suas linhas gerais, uma coletânea de aulas ministradas por W.G.Cochran no Departamento de Agricultura dos Estados Unidos da América, em janeiro de 1940.

a) a diferença entre tratamentos;

b) a diferença entre blocos e

c) uma parte residual, compreendendo tôda a variação não explicada por (a) e (b) e que denominamos de <u>êrro experimental</u>.

Sempre que **necessitamos** de uma prova de significância, temos que decompor a variância total ao menos em duas partes: a devida aos tratamentos e o êrro experimental. Para que essa prova de significância seja sensível, o êrro experimental deve representar quase que exclusivamente a variação devida ao acaso. Se compararmos <u>n</u> tratamentos em condições pràticamente constantes, o êrro experimental obtido estará nas condições acima.

Quando não podemos ter êsse contrôle experimental, procuramos obter o contrôle estatístico, dando à experiência uma disposição que permita eliminar do êrro experimental, variações que possam ser atribuídas a outras causas.

A disposição em blocos ao acaso conduz à comparação de canteiros em um mesmo bloco a qual é, usualmente, mais exata que a entre canteiros de blocos diferentes. Isso é expresso, de forma mais geral, dizendo-se que não são independentes as produções de canteiros vizinhos; a diferença entre as produções de dois canteiros próximos um do outro é, em geral, menor que a entre dois canteiros afastados.

Essa disposição, permitindo separar os componentes (b) e (c) da variância total, aumenta, por conseguinte, a exatidão do experimento.

2 - <u>Flexibilidade</u> - O plano em blocos ao acaso não conduz a restrições, quer quanto ao número de tratamentos, quer quanto ao de repetições.

Em relação a êste último, devemos considerar que êle não pode ser menor que dois, sem o que não é possível obter provas de significância e o máximo será determinado pela consideração de que, como veremos, à medida que aumenta o número de repetições, todos os aumentos equivalentes em precisão são obtidos a um custo cada vez maior. Após um limite, variável nos diferentes casos, um aumento no número de repetições implica em aumento de despesas, não compensado pelo aumento de eficiência do experimento. Êsse limite do número de repetições, é função de diversas variáveis e, sòmente um conhecimento prévio destas, poderá dar uma idéia do número de repetições que deve ter a experiência.

Êste assunto voltará a ser discutido com mais detalhes, sendo, porém, conveniente recordarmos que, para que um estatístico possa dizer-nos quantas repetições devemos usar para determinada experiência, êle necessita sempre de outras informações além da simples pergunta.

Quanto ao número de tratamentos, êste influi diretamente no tamanho do bloco. Se, ao grupamos os tratamentos que queremos estudar, em blocos, procuramos obter comparações entre canteiros próximos, podemos fàcilmente compreender que o aumento do tamanho do bloco destrói essa vantagem, e prejudica a eficiência da experiência considerada.

3 - Simplicidade da análise - É das mais simples e rápidas a análise da experiência em blocos ao acaso:

Se n é o número de tratamentos e k o de repetições, os nk canteiros de que consta a experiência proporcionam $nk-1$ gráus de liberdade, que decompomos em partes correspondentes aos três componentes de variação acima considerados. Teremos:

a) $n-1$ gráus de liberdade correspondentes às diferenças entre tratamentos

b) $k-1$, correspondendo às diferenças entre repetições e

c) $(n-1)$ $(k-1)$ para o êrro experimental.

A soma de quadrados de desvios do total é fàcilmente dividida em três partes ortogonais relativas às 3 divisões dos gráus de liberdade do total.

Além disso, é possível, neste plano, subdividir com facilidade o êrro, isolando as partes correspondentes à comparação entre quaisquer tratamentos. Da mesma maneira é possível excluir do conjunto de tratamentos um qualquer dentre êles sem, com isso, invalidar a experiência ou complicar a análise dos resultados. Estas propriedades serão grandemente vantajosas no caso em que as diferenças de produções entre alguns tratamentos sejam muito grandes, ou quando perdermos um dos tratamentos ou ainda quando o material estudado é muito heterogêneo.

4 - Número de repetições - Vamos, agora, considerar com mais detalhe os pontos apresentados acima, usando, para ês

se fim, alguns resultados numéricos.

Êsses resultados são as produções de 144 parcelas de 0,60m por 1,40m, correspondendo a uma parte de um ensaio de uniformidade de trigo instalado, em 1947, pelo Eng.Agr. Milton Alcover, da Secção de Cereais e Leguminosas.

TABELA I

Produções em gramas de 144 parcelas
(Ensaio de uniformidade com trigo, 1947)

				Norte								Totais
48	35	59	52	41	36	52	57	37	49	38	39	543
63	35	55	48	47	25	44	52	43	36	43	30	521
61	45	51	57	33	55	34	52	38	52	30	33	541
63	54	63	45	30	52	58	41	53	44	45	40	588
53	38	53	37	29	36	52	52	52	47	52	24	525
42	47	38	40	45	34	34	52	46	51	45	38	512
52	52	66	35	43	25	45	49	51	53	43	40	554
43	35	42	27	42	49	35	46	57	58	53	44	531
58	43	45	25	50	37	45	56	66	55	57	40	577
63	43	53	36	43	43	53	43	56	52	56	40	581
52	43	43	34	42	42	46	46	48	62	35	47	540
58	43	52	37	45	50	56	50	42	40	50	55	578
656	513	620	473	490	484	554	596	598	599	547	470	6591
totais				Sul								

As produções destas 144 parcelas têm um valor médio igual a 45,77 gramas, sendo o desvio padrão correspondente a um canteiro unidade de 9,16 gramas.

Vamos, primeiramente, considerar o número de repetições que deveríamos ter, usando um canteiro constituído por 3 dessas pequenas parcelas unitárias.

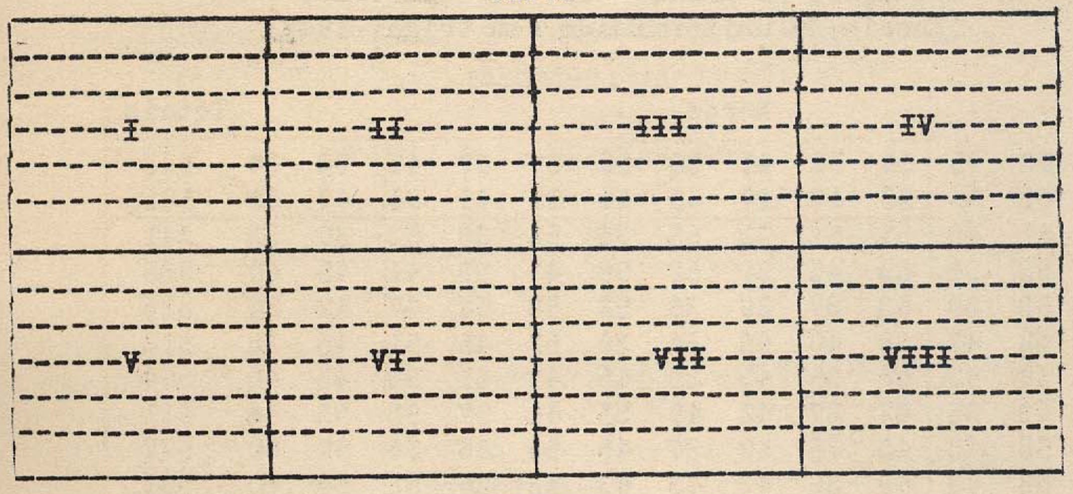
Aquêle número, como dissemos, depende de diversos fatôres: custo, trabalho, variabilidade do material estudado, tamanho provável das diferenças entre tratamentos e exatidão desejada. Os três últimos interessam-nos particularmente e são os que vamos considerar.

Sob o ponto de vista puramente estatístico, é possível obter uma idéia da grandeza das diferenças significativas, quando temos algum conhecimento prévio da grandeza da variância do material estudado. Da mesma forma, se aceitamos prèviamente uma determinada diferença significativa,co mo mínimo a ser tomado em consideração, podemos chegar ao número de repetições necessárias.

Consideremos, como dissemos, 3 parcelas unitárias na direção EO de forma a têrmos canteiros de 0,60 x 4,20 metros, e, por conseguinte, com área de $2{,}52m^2$.

Vamos supôr 8 blocos formados cada um dêles por 6 dêsses canteiros, de acôrdo com o esquema seguinte:

Norte



SUL

Nestas condições o valor médio por canteiro é 137,31 gr e o desvio padrão por canteiro 12,76gr. Vamos supôr que não nos interessam diferenças de produções menores que 10% ou, em números redondos, 14gr.

Temos:

$$t = d \frac{\sqrt{n}}{s\sqrt{2}}$$

Façamos t = 2,0 (êsse valor de t corresponde a 35 gráus de liberdade para P = 0,05) e d = 14 gr. Usando êsses valores obtemos:

$$2{,}0 = \frac{14\sqrt{n}}{12{,}8\sqrt{2}}$$ e, efetuando os

cálculos indicados, encontramos para n um valor próximo a 7. De forma que, para determinarmos uma diferença de produção de 14 gr necessitamos, no caso considerado, 7 repetições de um tratamento.

Caso não tivéssemos disposto os canteiros em blocos, o desvio padrão por canteiro seria 17,46gr e necessitaríamos 11 repetições para a determinação da referida diferença de 14gr.

Outra maneira de verificar o efeito das repetições consiste em calcular a diferença de produção que uma experiência com determinado número de repetições deve acusar, o que constitui uma medida do poder descriminativo do ensaio. Na tabela abaixo indicamos, para o desvio padrão 12,8, o poder descriminativo de ensaios com diferentes números de repetições:

TABELA II

	Valores de		d em %
n	t	d	da média
4	3,2	29gr	21,1%
5	2,8	23	16,5
6	2,6	19	14,0
8	2,4	15	11,2
10	2,3	13	9,6
15	2,1	10	7,1
20	---	8,5	6,2
25	---	8	5,5
40	2,0	6	4,2
60	---	4	3,4
100	---	4	2,6

A diferença a que nos referimos na Tabela II é a observada no ensaio e não a diferença real entre tratamentos, da qual a diferença observada pode diferir para mais ou para menos.

Esta tabela mostra que, como verificamos atrás, o decréscimo no valor de d, isto é, o aumento de sensibilidade da experiência é obtido com um custo que aumenta progressivamente.

5 - Tamanho do canteiro - Exprimindo-se o êrro padrão como porcentagem da produção média, verifica-se uma redução nos valores obtidos, quando aumentamos o tamanho do canteiro. Podemos observar êsse resultado se considerarmos os dados relativos à produção de trigo apresentados por Mercer e Hall e que podemos encontrar no livro de Wishart e Sanders - "Princípio e Prática de Experimentação de Campo", cuja tradução foi publicada por êste Instituto.

Nesse trabalho encontramos a seguinte tabela:

TABELA III

Nº de lotes unitários no canteiro	Área (acres)	Desvio-padrão como porcentagem da média
1	1/500	11,6
2	1/250	10,0
4	1/125	8,9
10	1/50	6,3
10	1/50	7,8
20	1/25	5,7
50	1/10	5,1

A partir dêsses dados concluiram Mercer e Hall que, com o tamanho de lote além de 1/40 acre, ou cêrca de 100 m^2, pouco se ganharia em exatidão, recomendando êste tamanho de canteiro como conveniente.

Consideremos, agora, os resultados obtidos com os 144 canteiros de trigo e que reunimos no quadro que segue (Tabela IV), onde estudamos:

A canteiros formados por uma única linha de canteiros unitários, na direção EO.

B ídem, na direção NS.

C canteiros retangulares, mais alongados na direção EO.

D ídem, mais alongados na direção NS.

E canteiros de 4 x 3 unidades, 4 unidades na direção EO.

F canteiros de 3 x 4 unidades, 4 unidades na direção NS.

G canteiros de 2 x 2 e 3 x 3 unidades.

TABELA IV

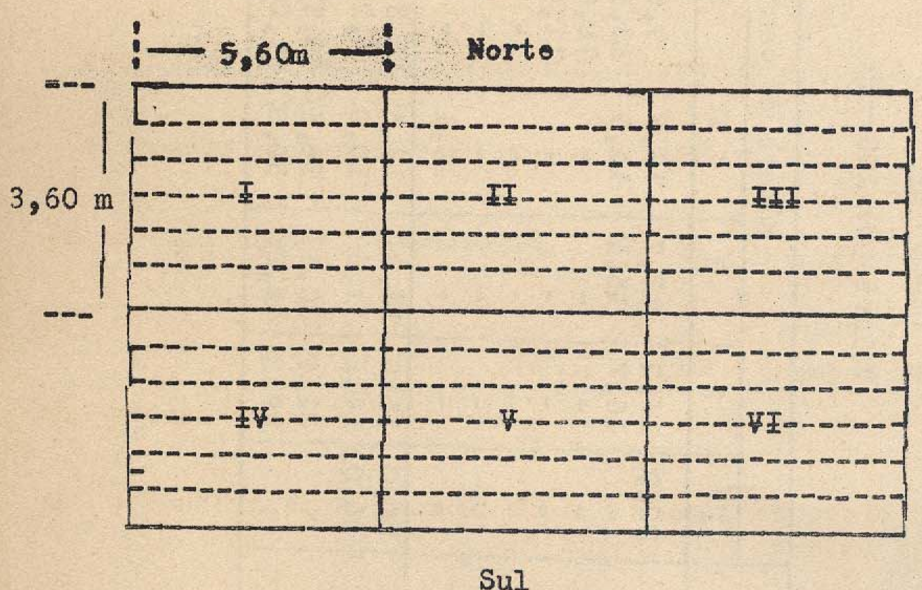
Valores de $100 \frac{s}{\bar{x}}$

Formato do canteiro	Número de canteiros							
	1	2	3	4	6	8	9	10
A	20,0	14,3	12,7	10,3	9,6	-	-	4,7
B	-	16,7	15,1	14,5	13,5	-	-	11,5
C	-	-	-	-	11,0	8,7	-	7,1
D	-	-	-	-	11,1	11,2	-	10,3
E	-	-	-	-	-	-	-	7,7
F	-	-	-	-	-	-	-	10,4
G	-	-	-	12,1	-	-	10,2	-
Média	20,0	15,5	13,9	12,3	11,3	9,9	10,2	8,6
Valor esperado	20,0	14,2	11,6	10,0	8,2	7,1	6,7	5,8
Redução obtida		22,4%	30,5%	38,5%	43,6%	50,4%	49,0%	56,9%
Redução esperada		29,3%	42,2%	50,0%	59,2%	64,6%	66,7%	71,1%

Wishart e Sanders chamam atenção para o fato de que a área estudada por Mercer e Hall era "muito uniforme". Essa, talvez, seja a razão da divergência existente entre os resultados obtidos por aquêles autores e os que estamos considerando. Êstes indicariam para o terreno estudado a adoção de um canteiro de tamanho menor, possìvelmente o de quatro unidades, juntadas na direção EO, isto é, com 5,60m x 0,60m.

Ao considerarmos o número de repetições, não foi êsse o tamanho que escolhemos. Mas, se considerarmos o efeito de blocos, veremos que o canteiro de 4,20 x 0,60m é, neste caso, pràticamente equivalente ao de 5,60 x 0,60m.

Consideremos os 144 canteiros unitários, reunidos em 36 canteiros das dimensões acima e suponhamos blocos aproximadamente quadrados e formados por 6 canteiros, de acôrdo com o seguinte esquema:



Nessas condições obtemos para $\bar{x}$ o valor 183,08gr e para o desvio padrão do êrro $s = 15,08$. Se calculássemos o número de repetições necessárias para evidenciar uma diferença de 18,5 gramas, obteríamos $n = 5,5$. Com canteiros de 3 unidades necessitaríamos de uma área teórica de 104m^2 para encontrarmos a diferença desejada e, com canteiros de 4 unidades, precisaríamos 110m^2 para obtermos o mesmo resultado.

Considerações práticas, tais como maior facilidade de cultivo, disposição da parcela experimental, etc., talvez nos levassem a adotar um tamanho de canteiro diverso dos que consideramos melhores, caso fôssemos realizar uma experiência comparativa de variedades de trigo, nesse terreno.

Vemos com isso que o tamanho ótimo de canteiro, para determinada experiência, é uma coisa que deve ser estudada de maneira especial para cada caso. Existem indicações gerais, obtidas a partir de experiências semelhantes à de Mercer e de Hall e a que estamos considerando, geralmente designadas como ensaios de uniformidade. É, no entanto, necessário quando pretendemos utilizar êsses resultados,grande cuidado na verificação da semelhança entre as condições em que os diferentes resultados foram obtidos e as em que vamos utilizá-los.

6 - Formato dos blocos - Para o estudo do formato dos blocos vamos utilizar os dados da tabela I e consideraremos 12 blocos com 12 parcelas unitárias cada um.

Estudaremos blocos com 6 formatos diferentes:

A) O bloco é constituído por uma coluna de canteiros na direção EO.

B) O bloco é constituído por uma coluna de canteiros na direção NS.

C) O bloco será de 2 x 6 canteiros, o maior número de canteiros estando na direção EO.

D) O bloco será de 2 x 6 canteiros, o maior número de canteiros estando na direção NS.

E) O bloco será de 3 x 4 canteiros, o maior número de canteiros na direção EO.

F) O bloco será de 3 x 4 canteiros, o maior número de canteiros estando na direção NS.

Com êsses blocos obteremos as seguintes somas de quadrados:

TABELA V

Blocos		A	B	C	D	E	F
Dimensões dos blocos		0,60 x 16,80	7,20 x 1,40	1,20 x 8,40	3,60 x 2,80	1,80 x 5,60	2,40 x 4,20
Origem da variação	GL	Soma de quadrados dos desvios					
Entre blocos	11	619	3.654	1.374	2.912	1.652	3.016
Dentro de blocos	132	11.386	8.351	10.631	9.093	10.353	8.989
Total	143	12.005	12.005	12.005	12.005	12.005	12.005
s do êrro		9,29	7,95	8,97	8,30	8,86	8,25
soma de quadrados entre blocos, expressa como porcentagem do total		5,1	30,4	11,5	24,3	13,8	25,1

Podemos verificar que, salvo em um caso, com a subdivisão em blocos, obtemos uma diminuição no desvio-padrão do êrro e, por conseguinte, uma melhoria na experiência.

É interessante observar que a porcentagem de gráus de liberdade que retiramos do êrro é de 7,7%, ao passo que a porcentagem que retiramos da soma de quadrados correspondente, é num caso, de 30,4% ou quatro vêzes a relativa ao número de gráus de liberdade do êrro e, em dois casos, mais de 3 vêzes maior que a referida porcentagem de diminuição no número de gráus de liberdade do êrro.

Êstes resultados mostram que se há um ganho quando se faz a distribuição dos tratamentos por blocos, é, no entanto, necessário que essa distribuição obedeça a um critério, o qual está estreitamente ligado às condições da experiência, pois os blocos devem sempre ser construídos de forma a diferirem o máximo possível.

Para a distribuição em blocos, é conveniente um conhecimento prévio do terreno e, quando êsse conhecimento não existe e não é fàcilmente obtenível, os blocos devem aproximar-se da forma quadrada.

7 - <u>Formato dos canteiros</u> - Como vimos, a subdivisão da experiência em blocos tem por finalidade retirar do êrro experimental, sob a forma de variação "entre blocos", o máximo das diferenças devidas à heterogeneidade da área experimental, deixando o mínimo possível de variação para a parte atribuída a "dentro de blocos", a qual vai contribuir para a formação do êrro experimental.

Êste resultado é obtido, como regra geral, dando-se aos blocos uma forma compacta.

Na subdivisão do bloco em canteiros, nosso propósito final é o mesmo que o considerado, isto é, diminuir o êrro experimental. Mas, a variação nos canteiros afeta o êrro experimental de maneira oposta à de blocos e, portanto, temos um objetivo imediato diretamente oposto ao que consideramos no estudo dos blocos: se queremos blocos diferindo uns dos outros tanto quanto possível, desejamos, do outro lado, maior igualdade entre canteiros, dentro de um bloco.

Isto se deve a que o êrro experimental se origina ùnicamente da variação dentro de blocos e, por conseguinte, quanto menor fôr ela, ou em outras palavras, quanto menor a diferença entre os canteiros no bloco, tanto menor será o êrro experimental.

Os canteiros deverão ter a forma alongada, de maneira a que se confrontem na maior extensão possível. Essa dispo sição é a mais vantajosa quando existe um gradiente de fertilidade paralelo ao maior comprimento dos canteiros e será pouco pior que a de canteiros quadrados, no menos vantajoso dos casos, aquêle em que o gradiente é em sentido oposto ao maior comprimento dos canteiros.

8 - Aplicações - Com isto concluimos a discussão geral das experiências de campo em blocos ao acaso. As considerações que utilizamos foram sempre de natureza estatística, as quais conduzem a conclusões que têm de ser, muitas vêzes, modificadas, a fim de se adaptarem a condições de natureza prática, pois que estas, por sua vez, afetam os diferentes itens discutidos.

Vamos considerar um exemplo de experiência que segue o plano de blocos ao acaso, mas em que os blocos não são materializados como os encontrados na maioria das experiências agrícolas.

a) Suponhamos uma experiência na qual queremos comparar uma série de k dietas. Usamos n animais, para cada uma dessas dietas ou tratamentos, cada um dêles constituindo uma repetição do tratamento. Suponhamos mais, que os animais comparados são porcos, os quais não são todos da mesma idade e sabemos que seu ganho em pêso difere de acôrdo com a idade.

Se possuirmos k porcos de cada uma das idades, podemos usar um plano correspondente ao de blocos ao acaso. Teremos n grupos de k porcos, cada um dos indivíduos em um grupo recebendo uma dentre as k rações. A análise da variância obedecerá ao esquema:

	g.l.
Tratamentos	$k - 1$
Idades (blocos)	$n - 1$
Êrro	$(n - 1)(k - 1)$
Total	$nk - 1$

b) Consideremos, agora, uma experiência em que temos um exemplo de decomposição de gráus de liberdade, a qual como dissemos, é muito simples no caso de blocos ao acaso. Os característicos principais dêste ensaio foram os seguintes:

Ensaio de sistema de plantío com batata doce
1940/1941 ——— Campinas

1 - Propagação por meio de raízes pequenas		raízes
2 - " " " " " grandes		
3 - " " " " ponteiro distendido		ramos
4 - " " " " " em laço		
5 - " " " " parte média distendida		
6 - " " " " " " em laço		

Nesta experiência, o compasso de plantação foi de 0,90m x 0,40m, tendo cada canteiro 4 linhas de 15 plantas e medindo 6,00 x 3,60, com uma área de 21,60m^2.

A disposição dos canteiros nos blocos era de 3 x 2, de forma que as dimensões dêstes eram de 10,80 x 12m.

Os canteiros receberam uma adubação básica completa nas proporções de 40N, 60K_2O e 30P_2O_5.

As produções de batatas em kg por canteiro, foram as seguintes:

TABELA VI

Trat. / Rep.	1	2	3	4	5	6	Totais
1	4,2	2,0	28,2	38,4	26,0	32,6	131,4
2	2,2	5,0	42,2	24,4	32,7	23,2	129,7
3	1,8	4,3	31,2	24,2	26,5	26,0	124,0
4	2,8	1,5	22,9	35,4	26,2	29,7	118,5
Totais	11,0	12,8	124,5	132,4	111,4	111,5	503,6

Para a análise da variância obtivemos:

Origem da Variação	GL	QM	F
Tratamentos	5	794,91	30,83**
Blocos	3	5,72	0,22
Êrro	15	25,77	
Total	23		

A diferença mínima para comparação de dois totais de tratamentos é, neste caso:

$$d.m. = t \sqrt{8 \times 25,77} = 2,10 \sqrt{206,16} = 30,2$$

Se quizermos utilizar essa diferença mínima para compararmos os tratamentos 1 e 2, notaremos que ela é maior que qualquer um dos dois totais considerados, o próprio desvio padrão correspondente ao total de 4 valores (10,2) sendo quase que da mesma grandeza que êsses totais.

O que sucede no presente caso é que uma das hipóteses em que se baseia a análise da variância não é satisfeita, não sendo possível admitir uma variância para todos os tratamentos. Vamos, por essa razão, decompôr a experiência em duas partes: uma correspondente aos tratamentos em que o meio de propagação são as raízes, na outra, o meio utilizado foi a rama.

A existência dêsses dois grupos de tratamentos justifica a decomposição considerada.

Analisando a experiência em duas partes, obtemos os seguintes resultados:

1ª parte:

Origem da Variação	g.l.	QM
Tratamentos	1	0,41
Blocos	3	0,73
Êrro	3	3,30
Total	7	

A diferença mínima seria agora:

$$2,4 \sqrt{8(3,30)} = 12,10 \text{ kg.}$$

a qual, se bem que ainda muito grande, é muito menor que a obtida anteriormente.

O número de repetições utilizado é excessivamente pequeno para poder determinar a significância de uma diferença da grandeza da encontrada.

2ª parte:

Origem da Variação	G.L.	MS
Tratamentos	3	26,68
Blocos	3	5,94
Êrro	9	41,54
Total	15	

$$2,2 \sqrt{8(41,54)} = 40,11 \text{ kg.}$$

Êsses resultados permitem verificar que a diferença mínima encontrada na análise geral é excessiva para a primeira parte e muito pequena para o segundo grupo de tratamentos.

Caso desejássemos comparar as médias dos tratamentos do 1º grupo com as do segundo, seria fácil obter um êrro apropriado para essa prova. As diferenças entre essas duas médias é, no entanto, tão grande, que tal prova estatística é desnecessária.

B - Quadrado Latino

Consideremos uma tabela de dupla entrada com o mesmo número de linhas e colunas, número êsse que designaremos por k. Suponhamos, agora, que temos k tratamentos e que distribuímos êsses tratamentos entre as k^2 células de tabela, de tal forma, que cada tratamento apareça uma única vez em cada linha e coluna. Se escolhermos por sorte uma das disposições possíveis, teremos o plano experimental que designamos por - quadrado latino, cujas propriedades passamos a estudar.

1 - Exatidão - A disposição em quadrado latino conduz ao grupamento dos tratamentos em duas séries de blocos. Permite, por conseguinte, a eliminação dos efeitos devidos a gradientes de fertilidade, em duas direções. Dessa dupla eliminação decorre, na maioria dos casos, maior exatidão que a obtida com a disposição em blocos ao acaso.

2 - Flexibilidade - O uso do quadrado latino limita o número de repetições, fixando-o igual ao de tratamentos, o que torna êsse plano pouco prático nos casos em que o número de tratamentos é muito pequeno ou quando muito elevado. Quando o número de tratamentos é pequeno, podemos contornar a dificuldade, usando maior número de quadrados

latinos, mas, quando os tratamentos são em número elevado, não temos outro recurso senão o de usar outro plano experimental.

3 - Simplicidade da análise - Para analisar um quadrado latino, subdividimos os k^2-1 gráus de liberdade correspondentes aos k^2 canteiros em 4 partes:

Origem do êrro	Gráus de liberdade
Tratamentos	$k - 1$
Linhas	$k - 1$
Colunas	$k - 1$
Êrro	$(k - 1)\ (k - 2)$

e as somas de quadrados correspondentes a êsses gráus de liberdade são fàcilmente obteníveis.

Diversamente do que sucedia com os blocos ao acaso, o têrmo correspondente ao êrro não pode ser, no quadrado latino, subdividido de forma a isolar a parte devida à comparação entre grupos de tratamentos. Decorre disto, que quando um ou mais tratamentos têm que ser eliminados da análise, esta é bastante mais complicada do que no caso de blocos ao acaso.

4 - Comparação entre os planos de blocos ao acaso e em quadrado latino - Utilizando a experiência de uniformidade de trigo, da qual retiramos as 144 observações iniciais, A. Conagin calculou a eficiência relativa de blocos ao acaso e quadrados latinos, utilizando 20 amostras diferentes. Os resultados obtidos são os contidos na TABELA VII (pg. 39).

TABELA VII

Amostras	Êrros experimentais			Diferenças mínimas expressas em % da média geral		
	Blocos alongados	Blocos quadrados	Quadrado latino	Blocos alongados	Blocos quadrados	Quadrado latino
1	7604	3278	1574	27,2	17,9	12,7
2	1617	2005	1131	14,1	15,7	12,1
3	3014	1224	1190	18,9	12,0	12,2
4	4234	2418	2278	21,6	16,3	16,3
5	2865	1295	1272	19,0	12,8	13,0
6	1159	816	877	10,5	8,8	9,4
7	2655	1782	2269	15,8	12,9	15,0
8	3959	3546	1820	18,5	17,5	12,9
9	3000	3247	2156	16,8	17,4	14,6
10	3232	3429	2549	17,7	18,3	16,2
11	2720	1602	1746	17,3	13,2	14,2
12	2254	868	956	15,4	9,6	10,3
13	2831	1732	1246	17,8	13,9	12,2
14	1202	3834	2111	11,7	20,9	15,9
15	5012	1598	810	22,3	12,6	9,2
16	1814	2681	1369	13,5	16,4	12,0
17	5483	1035	831	23,2	10,1	9,3
18	4835	1317	805	21,6	11,2	9,0
19	1813	2456	970	14,8	17,2	11,1
20	2854	1975	1896	18,1	15,0	15,1
Média				17,8%	14,5%	12,7%
Eficiência relativa				71,3%	87,6%	100,0%

C - Interação - Pretendemos, agora, dar uma introdução geral às experiências denominadas fatoriais. Sob êsse nome compreendemos não uma disposição experimental pròpriamente dita, mas sim um determinado tipo de combinação dos tratamentos a serem experimentados.

Antes de iniciarmos essa introdução, daremos uma idéia geral sôbre o que denominamos interação de dois grupos de tratamentos, idéia essa essencial à compreensão das experiências fatoriais.

Dizemos que existe a interação A x B, isto é, que existe a interação do tratamento A sôbre o tratamento B, se o efeito do tratamento A, quando aplicado juntamente com B é diferente de seu efeito quando usado sem B.

Vamos considerar esta definição mais detalhadamente, su pondo para êsse fim, alguns resultados experimentais:

1 - Determinamos que a uma adubação de 10 gr de salitre, corresponde um aumento de 100 gr na produção de uma planta. Sabemos mais que a uma adubação de 30 gr de superfosfato, corresponde um aumento de 200 gr. Se, quando usarmos conjuntamente os dois adubos, o aumento de produção correspondente a 10 gr de salitre mais 30 gramas de superfosfato, fôr de 100 gr mais 200 gr, isto é, 300 gr, dizemos que não existe interação, ou que os dois efeitos são <u>independentes</u> um do outro.

2 - Numa série de experiências comparativas de duas variedades A e B, usamos dois diferentes espaçamentos, que designaremos por 1 e 2. Obtivemos os seguintes resultados:

1ª experiência:

Variedade	Espaçamento 1	Espaçamento 2
A	12	14
B	16	18

2ª experiência:

Variedade	Espaçamento 1	Espaçamento 2
A	12	14
B	19	16

3ª experiência:

Variedade	Espaçamento 1	Espaçamento 2
A	12	14
B	10	16

Consideremos, agora, as diferenças em produções para cada uma das variedades, nos dois espaçamentos estudados:

Na 1ª experiência, a variedade A produziu 2 unidades mais, quando usamos o espaçamento 2, o mesmo se verificando relativamente à variedade B. Por conseguinte, as variedades A e B comportaram-se da mesma forma em relação aos dois espaçamentos utilizados. Neste caso, não existe a interação variedade x espaçamento.

Já na 2ª e 3ª experiências, não se verifica essa igualdade no aumento de produção das variedades A e B, quando usamos os dois espaçamentos. Na 2ª experiência a produção de A aumentou de duas unidades com o uso do espaçamento 2, ao passo que a de B diminuiu três unidades com o emprêgo dêste último espaçamento.

Na 3ª experiência o aumento correspondente a A foi de duas unidades, enquanto que o de B foi de seis unidades.

Nestas duas últimas experiências, as variedades comportaram-se diversamente quando usamos espaçamentos diferentes.

Exprimimos êsse resultado dizendo que, nas duas últimas experiências, existe uma interação entre variedades e espaçamentos.

Quando não existe essa interação, os efeitos dos dois grupos de tratamentos (neste caso variedades e espaçamentos) são independentes, não o sendo no caso de haver interação.

Se representarmos as produções obtidas nestas experiências pelo esquema:

Variedades	Espaçamentos 1	2	Totais
A	a_1	a_2	a_1+a_2
B	b_1	b_2	b_1+b_2
Totais	a_1+b_1	a_2+b_2	

o efeito de variedades é medido pela diferença

$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)$, o de espaçamentos por

$(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)$ e a medida da interação será dada por

$$\frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) + (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2)\right] =$$
$$= \left[(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)\right]$$

e, nestas condições, se

$$(b_1 + a_2) \angle (a_1 + b_2),$$

teremos uma interação positiva e negativa se a desigualdade fôr em sentido contrário.

Os resultados acima dão, para a medida da interação nas 3 experiências, os valores 0, (-5) e 4.

Êstes resultados mostram um processo de obter o valor da interação nos casos simples e exprimem o que dissemos acima: Na primeira experiência a interação é nula, não o sendo nas duas outras. Na segunda, os efeitos dos espaçamentos sôbre as duas variedades são opostos, o aumento de espaçamento que condiciona um aumento de produção da variedade A, afeta em sentido contrário, e, em maior proporção, a variedade B; temos uma interação negativa. Na 3ª experiência, o aumento de produção é menor para a variedade A do que para B, do que resulta uma interação positiva.

O êrro nas experiências em blocos ao acaso é dado pela interação tratamentos x blocos. O valor esperado dessa interação é, porém, nulo, desde que a distribuição dos tratamentos pelos blocos se faça ao acaso, condição essencial para a existência de uma estimativa válida do êrro experimental.

D - Experiências fatoriais

1 - Nas experiências fatoriais estudamos conjuntamente diversos fatôres de variação (grupos de tratamentos), e constitui característico essencial dessas experiências o entrarem <u>tôdas</u> as combinações dos fatôres estudados.

Assim, o exemplo hipotético que utilizamos para explicar a interação constitui uma experiência fatorial das mais simples.

Nela existem dois grupos de tratamentos (variedades e espaçamentos) e dois níveis em cada um dêsses grupos, as variedades A e B, e os espaçamentos 1 e 2.

Por essa razão, classificamos essa experiência como sendo uma experiência fatorial do tipo 2 x 2 ou 2^2, isto é, na qual consideramos ao todo 4 tratamentos em dois grupos, com dois níveis cada um.

A análise desta experiência depende, inicialmente, da disposição adotada. Se dispuzermos êsses 4 tratamentos em blocos ao acaso, com 4 repetições, por exemplo, teremo a decomposição usual dos gráus de liberdade na forma:

Origem da Variação	g.l.
Tratamentos	3
Repetições	3
Êrro	9

A inovação consiste na possibilidade de decompor a variação devida a tratamentos em 3 partes:

Origem da Variação	g.l.
Variedades	1
Espaçamentos	1
Int.Var. x Espaç.	1
Tratamentos	3

Esta experiência vai, por conseguinte, nos fornecer informação não sòmente quanto à diferença entre variedades a entre espaçamentos, como também sôbre a interação.

Outra coisa interessante que se verifica com esta experiência é o número de repetições de um tratamento que ela fornece. Para compararmos a variedade A com B, não teremos 4, mas sim 8 repetições, pois 8 canteiros serão plantados com a variedade A e os outros 8 com B e, para cada compasso de plantação utilizado para A, teremos o correspondente para B.

A comparação entre êsses grupos de 8 canteiros indicará a diferença média do comportamento das duas variedades,quando sujeitas aos dois compassos de plantação considerados. Convém notar que o que dissemos relativamente a variedade também se aplica a espaçamentos.

2 - Vamos considerar outro exemplo, o de um fatorial do tipo 2^3.

Três tratamentos diferentes a, b e c podem ser utilizados no combate a uma moléstia. Suponhamos que a represente um regime alimentar, por b representamos repouso e c tratamento por um conjunto de drogas medicinais. Quere mos fazer uma experiência com o fito de investigar

i) qual dêstes tratamentos o mais eficiente;

ii) se o emprêgo conjunto de dois dêles ou dos três conjuntamente é mais vantajoso que o emprêgo de um dêles isoladamente.

Vamos imaginar que 32 pacientes estão dispostos a se sujeitar à experiência.

Inicialmente, separamos por sorte os 32 doentes em 8 grupos e sorteamos entre êsses grupos os tratamentos seguintes:

Tratamento	Medicamento	Tratamento	Medicamento
1	Testemunha(1)	5	a e b
2	a	6	a e c
3	b	7	b e c
4	c	8	a, b e c

Os resultados obtidos foram os seguintes:

TABELA VIII

Tratamento	Nº de dias				Total de dias em 4 pacientes
(1)	30	5	40	35	110
a	30	12	32	36	110
b	60	95	68	77	300
a b	90	52	64	114	320
c	95	90	85	70	340
a c	100	106	78	86	370
b c	120	120	100	110	450
a b c	97	111	141	131	480
					2 480

Na organização desta tabela, supuzemos que, em geral, os principais sintomas da moléstia desaparecessem, no máximo, ao fim de 200 dias e os resultados acima exprimem o número de dias a menos de 200, necessários ao desaparecimento dos sintomas nos pacientes observados.

A análise, como em tôdas as experiências fatoriais, se faz em duas partes.

i) A análise da variância usual, seguindo o plano geral da experiência.

ii) A decomposição do efeito geral de tratamentos em uma série de componentes ortogonais.

Para a primeira parte temos, neste caso, uma decomposição simples, a variação total sendo subdividida em entre e dentro de tratamentos. O resultado final dessa análise é o seguinte:

Origem da variação	g.l.	SQ	QM	F
Entre tratamentos	7	33.300	4.757,1	18,05**
Dentro de tratamentos	24	6.326	263,6	
Total	31	39.626		

Passemos, agora, à parte relativa à decomposição do efeito de tratamentos.

Efeitos principais:

$\underline{a}$ sem $\underline{b}$ e sem $\underline{c}$ = a - (1) = 0
$\underline{a}$ com $\underline{b}$ e sem $\underline{c}$ = ab - b = 20
$\underline{a}$ sem $\underline{b}$ e com $\underline{c}$ = ac - c = 30
$\underline{a}$ com $\underline{b}$ e com $\underline{c}$ = abc - bc = 30
Efeito médio = 80/4 = 20

Os efeitos B e C podem ser calculados de maneira semelhante ou poderíamos usar um quadro do tipo utilizado quando da explicação da interação. Teremos para B e C:

	com c	sem c	Totais
com b	930	620	1.550
sem b	710	220	930
	1.640	840	2.480

A partir dêste quadro encontramos:

efeito médio de B = 1/4(1.550 - 930) = 155
efeito médio de C = 1/4(1.640 - 840) = 200

Consideremos, agora, a interação simples AB.

Obtemos essa interação achando a diferença da reação à substância a, na presença e ausência de b. Será dada, por conseguinte, por

diferença
- na ausência de c = (ab-b)-(a-(1))=(320-300)-(110-110)
- na presença de c = (abc-bc)-(ac-c)=(480-450)-(370-340)=0

Por conseguinte,

$$AB = 1/8\ (20) = 2{,}5$$

Podemos obter AC e BC por êsse processo ou a partir das pequenas tabelas que consideramos. Para BC, temos:

$$(930 - 620) - (710 - 220) = -180 \text{ ou}$$

$$BC = 1/8\ (180) = -22{,}5$$
$$AC = 1/8\ (40) = 5$$

A interação ABC é dada por

$$\left[(abc-bc) - (ac-c)\right] - \left[(ab-b)-(a-(1))\right] = -20$$

$$ABC = 1/16\ (-20) = -1{,}25$$

Os resultados finais desta experiência estão condensados no quadro abaixo. Calculamos a estimativa da variância correspondente a cada um dos efeitos, a qual dividida pelo êrro experimental, proporciona uma prova de significância.

TABELA IX

Símbolo	Efeitos Valor	Total	SQ = 1/32 (total)^2
A	20	80	200,0
B	155	620	12.012,5
AB	2,5	20	12,5
C	200	800	20.000,0
AC	5	40	50,0
BC	-22,5	-180	1.012,5
ABC	- 1,25	- 20	12,5
			33.300,0

3 - Vamos considerar a decomposição da variação relati a tratamentos nas partes correspondentes a efeitos principais e interações, num exemplo, relativo a uma experiênci de adubação. Nesse ensaio, desejamos estudar os efeitos do azôto, fósforo e potássio, sendo que para o adubo fosf tado usamos duas doses diferentes, isto é, três níveis.

Para êsse fim, vamos organizar um ensaio fatorial do ti po $2^2 \times 3$, em que os tratamentos são dados pelos esquemas seguintes:

símbolos	n	p_1	p_2	k
doses por Ha, kg.	20 N	50 P_2O_5	100 P_2O_5	30 K_2O

Tratamentos

	sem p		p_1		p_2	
	sem n	n	sem n	n	sem n	n
sem k	(1)	n	p_1	np_1	p_2	np_2
k	k	nk	p_1k	np_1k	p_2k	np_2k

Para sabermos, na obtenção dos efeitos principais e interações, quais os tratamentos que devemos considerar o seguinte esquema que é o apropriado para o fatorial do tipo 2^3, pode ser utilizado:

Efeito	produto correspondente		
N	$(n - 1)$	$(p + 1)$	$(k + 1)$
P	$(n + 1)$	$(p - 1)$	$(k + 1)$
NP	$(n - 1)$	$(p - 1)$	$(k + 1)$
K	$(n + 1)$	$(p + 1)$	$(k - 1)$
NK	$(n - 1)$	$(p + 1)$	$(k - 1)$
PK	$(n + 1)$	$(p - 1)$	$(k - 1)$
NPK	$(n - 1)$	$(p - 1)$	$(k - 1)$

Os sinais que os tratamentos devem ter, são obtidos efetuando a multiplicação algébrica dêsses fatôres. Teremos para NP, por exemplo:

+	-
npk	pk
k	nk
np	p
(1)	n

No exemplo, o fatorial considerado é do tipo $2^3 x 3$ e p está representando p_1 e p_2. Deveremos, portanto, considerar:

+	-
np_1k	p_1k
np_2k	p_2k
k	nk
np_1	p_1
np_2	p_2
(1)	n

e, 1/6 da diferença total dará o valor relativo ao efeito médio procurado.

-o-

Referência bibliográfica

1. Cochran, W.G. - A survey of Experimental Design. United States Department of Agriculture, Washington 1940. Mimiografado para circulação restrita.

2. Conagin, A. - Eficiência na experimentação com canteiros. Em Revista de Agricultura 24: 123-128. Piracicaba 1949.

3. Fisher, R.A. - The Design of Experiments; Oliver and Boyd. Londres 1937.

4. Yates, F. - The Design and analysis of factorial experiments. Imp. Bureau of Soil Science. Tech. Commun. Nº 35 1937.

DESENVOLVIMENTOS MODERNOS DO DELINEAMENTO DE EXPERIMENTOS

PARTE I

W.L.Stevens

1 - INTRODUÇÃO

1,1 Na conferência do sr. C.G.Fraga Jr., os senhores encontraram os dois delineamentos* clássicos: Blocos ao Acaso e o Quadrado Latino. Recordamos que êsses delineamentos, embora inventados e aplicados primeiro aos ensaios de campo, e mais fàcilmente compreendidos através de exemplos de experimentação agrícola, são igualmente aplicáveis a todos os ramos de pesquisa científica. São de fato, meros artifícios que nos permitem alargar um experimento sem perdermos exatidão em resultado da maior heterogeneidade do material experimental.

Podemos isso exemplificar, com um experimento imaginário, projetado para comparar porcos criados com diversas dietas. Suponhamos que pretendemos comparar a taxa de crescimento de porcos alimentados com 5 dietas diferentes, designadas por a, b, c, d, e. Qualquer investigador exigiria que os porcos escolhidos para o experimento fôssem tão uniformes quanto possível, tanto na herança genética, como nos fatôres devidos ao ambiente. É possível que a melhor maneira de escolher um grupo uniforme seja aproveitar um grupo de 5 porcos que pertençam todos à mesma ninhada. É, contudo, claro que devemos replicar os tratamentos tanto para obtermos uma estimativa do êrro-padrão, como para aumentar a precisão das comparações entre as dietas. É igualmente claro que não poderemos obter 10 ou 15 porcos da mesma ninhada. Como, então poderemos alargar o experimento e ao mesmo tempo conservar a vantagem de precisão conferida pelo alto gráu de uniformidade existente dentro de uma só ninhada?

A resposta, como os senhores já o sabem, é que podemos constituir tantos grupos de 5 porcos quanto quizermos, se

* Empregamos "delineamento" para traduzir a palavra inglêsa <u>design</u>.

do cada grupo da mesma minhada. Os 5 porcos dentro de cada grupo, recebem as 5 dietas, respectivamente. Uma comparação entre as médias de duas dietas quaisquer, fica, assim, isenta do efeito das diferenças entre os grupos e o experimento, terá a mesma exatidão como se os porcos fôssem todos da mesma ninhada.

O experimento que acabamos de descrever, é, de fato, nada mais do que um exemplo de "Blocos ao Acaso". Cada grupo de 5 porcos constitui um "Bloco" na terminologia dos ensaios de campo. O têrmo "Blocos ao Acaso" lembra-nos que dentro de cada bloco, os porcos devem ser selecionados ao acaso, para receberem, respectivamente, as cinco dietas.

Vê-se a necessidade desta escolha ao acaso sem recorrer a uma investigação matemática. Vamos supôr a existência de algumas pequenas diferenças visíveis entre os cinco porcos de um grupo ou suponhamos, se quizerem, que tínhamos anotado os pesos dêsses porcos ao nascer. Seria claramente errado escolhermos em cada grupo o porco mais desenvolvimento para receber a dieta a. Se assim fizessemos, a média calculada para a dieta a seria, pròvàvelmente, prejudicada. Para evitarmos tôda e qualquer "tendência" (bias), é necessário escolhermos o porco para a dieta a e para as outras dietas puramente ao acaso. Não é possível escolher ao acaso, subjetivamente; a única maneira permissível é um método objetivo, tal como o lançamento de um dado ou uma tabela de números ao acaso.

Poder-se-ia sugerir, contudo, que sendo visíveis algumas diferenças entre os porcos de um grupo, devêssemos equilibrar essas diferenças em vez de deixar os seus efeitos ao sabor da sorte.

Suponhamos, por exemplo, a possibilidade de ordenar os cinco porcos conforme o seu pêso ao nascer ou segundo a resistência julgada subjetivamente. Com cinco grupos, poderemos então, exigir que o melhor porco receba as dietas a, b, c, d e e nos respectivos cinco grupos e semelhantemente, para o segundo, terceiro, ... em cada grupo. Chegaremos, assim, a um delineamento do seguinte tipo:

Grupo	1º	2º	3º	4º	5º (em ordem)
I	c	b	e	d	a
II	d	a	b	c	e
III	a	c	d	e	b
IV	b	e	c	a	d
V	e	d	a	b	c

Não há aqui nada de novo, contudo. É simplesmente o "Quadrado Latino". O elemento de escolha ao acaso não fica abandonado. A única diferença é que impuzemos mai uma restrição no delineamento - a restrição de cada dieta aparecer uma só vez em cada coluna.

O esquema ainda tem que ser escolhido ao acaso dentre todos os quadrados latinos de tamanho 5 x 5 possíveis. O delineamento aqui sugerido é inteiramente legítimo, embora não seja o geralmente usado num experimento dêste tipo

Para resumir, notemos três fatos:

(i) - Que as categorias de blocos, filas, colunas, canteiros (ou talhões) que têm um significado topográfico num ensaio de campo, significam, em geral, meras classificações, de modo que o delineamento de um experimento, que pode ser olhado como a planta do experimento no caso de um ensaio de campo se torna, em geral, simplesmente um diagrama da estrutura abstrata do experimento. Ao mesmo tempo nos convém manter a terminologia de experimentação agrícola. Conservamos, por exemplo, o têrmo "bloco" para o "grupo" de porcos, ainda que a palavra pareça invulgar neste contexto.

(ii) - Que o nosso propósito é sempre arranjar o experimento de tal modo que as diferenças dentro dos blocos, filas ou colunas (além das devidas aos tratamentos) sejam tão pequenas quanto possível. Já dado o material experimental, isto resulta em que as diferenças entre-blocos, filas ou colunas, deverão ser tão grandes quanto possível. Para delinear um experimento bastante sensível é necessário, porisso, tomar em consideração a natureza da variação esperada no material experimental. Claro é que, às vêzes, nos enganaremos na nossa previsão da variação. Isto não afetará a validade do experimento: resulta meramente em um resultado menos exato do que se teria obtido se o experimento tivesse sido feito de outra maneira.

(iii) - Que o delineamento do experimento impõe o método da análise estatística. A cada delineamento correspond uma análise estatística. Há um meio século isso não er bastante percebido. É muito interessante ler a êste respeito o terceiro capítulo do "Design of Experiments". A o Prof. Fisher examina um experimento feito por Charles Darwin e a análise estatística dêle, fornecida por Francis Galton. Os princípios de delineamento experimental empregados por Darwin foram relativamente adequados, emb ra não perfeitos, ao passo que a análise estatística foi incapaz de interpretar os dados corretamente.

1,2 Limitações dos Delineamentos Clássicos

Vamos, agora, examinar uma limitação fundamental tanto do delineamento de Blocos ao Acaso como do Quadrado Latino. É que o número de tratamentos ou variedades que comparamos tem que ser igual ao número de "canteiros" (isto é, unidades) quer no bloco, na fila ou na coluna. Se, por exemplo, quizéssemos aumentar o número de dietas, no nosso experimento imaginário, de cinco até nove ou dez, o delineamento em blocos ao acaso tornar-se-ia impossível por ser quase impossível obter, em uma mesma ninhada, dez porcos do mesmo sexo.

A solução clássica dêste dilema consiste na introdução de um assim chamado contrôle. Uma dieta - digamos a primeira- é escolhida como contrôle ou testemunha e entra em cada bloco. Com nove dietas (incluindo o padrão) podemos arranjar duas séries iguais de blocos, recebendo os da primeira série as dietas a, b, c, d, e e os da segunda a, f, g, h, i.

Por exemplo, com 12 blocos, teremos:

Série A		Série B	
I	a b c d e	VII	a f g h i
II	a b c d e	VIII	a f g h i
III	a b c d e	IX	a f g h i
IV	a b c d e	X	a f g h i
V	a b c d e	XI	a f g h i
VI	a b c d e	XII	a f g h i

O defeito dêste delineamento é que as comparações entre as médias de dietas não têm tôdas a mesma exatidão. Podemos comparar a média de b com a média de c diretamente, visto essas duas dietas caírem nos mesmos blocos. Mas, para comparar b com f, temos que passar através do contrôle a, comparando b com a nos blocos da primeira série e a com f na segunda série.

Temos, de fato, que calcular os dados dos blocos da Série A, a diferença:

Média de (b) - Média de (a)

e dos dados da série B, a diferença:

Média de (a) - Média de (f)

A soma destas duas diferenças nos dará, então, uma estimativa da diferença entre b e f.

Verificamos, de fato, que a variância (quadrado do êrro-padrão) duma comparação do segundo tipo (b com f) é duas vêzes a variância duma comparação do primeiro tipo (b com c).

O experimento fica, assim, completamente desequilibrado. Além disso, a simplicidade das regras que fornecem os erros-padrões de comparações no caso de um experimento em blocos ao acaso desaparece.

Para tôda e qualquer comparação temos que estudar o delineamento para descobrir a fórmula para o êrro-padrão. A dificuldade torna-se ainda maior quando se trata não meramente de uma comparação entre dois tratamentos, mas sim de uma função linear mais complicada, como, por exemplo, um coeficiente de regressão que se calcularia no caso de haver diferenças quantitativas, em vez de qualitativas, entre as dietas.

Além disso, a escolha de uma variedade ou de um tratamento para servir de contrôle é geralmente arbitrária. Se quizermos, por exemplo, selecionar as duas ou três melhores linhagens de algodão dentro de 20 linhagens fornecidas pela secção de melhoramento de algodão, não poderemos indicar, senão arbitràriamente, uma linhagem para o padrão ou contrôle.

Somos levados, assim, à consideração da possibilidade de construirmos um delineamento que obedeça às condições seguintes:

(i) - que o número de unidades por bloco seja menor que o número de variedades ou tratamentos.

(ii) - que tôdas as comparações entre duas variedades, ou dois tratamentos, tenham a mesma precisão (como têm nos delineamentos de blocos ao acaso e de quadrado latino).

2 - BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS (Balanced Incomplete Blocks)

2,1 Vamos começar com a forma mais simples do problema. Suponhamos que o bloco é restrito a duas unidades (canteiros ou talhões): isto não é, de modo algum, invulgar. Por exemplo, em um experimento de psicologia pedagógica, com o propósito de comparar diversos sistemas de ensinar estatística, o melhor procedimento seria escolher, para a prova, uma série de gêmeos monozigóticos. Os dois gêmeos são idênticos na herança genética e muito parecidos na história de ambiente, nas influências familiares, sociais, etc. O par constitui, por isso, um "bloco" natural com dois "canteiros".

Muitos outros casos nos chegam à mente. Lembramo-nos de um experimento que planejamos para estudar e comparar diversas modificações no método de curtir. O couro bruto é um produto muito variável, mas, como esperávamos, varia muito mais de uma pele para outra, do que de uma para outra parte da mesma pele. Um só couro constitui, por isso, um "bloco" natural. Queríamos realizar o experimento nas condições atuais de produção comercial e não no laboratório. Era possível (e, de fato, usual) dividir cada couro na linha dorsal, separando, assim, os lados direito e esquerdo do boi. Dividir em mais de duas porções, não era praticável. Tínhamos, portanto, um bloco natural de dois canteiros - um bloco que consistia nas duas metades do mesmo couro.

Do mesmo modo podemos considerar outros experimentos em que o bloco se divide convenientemente em duas unidades. Por exemplo, na investigação dos efeitos de vários preparados tóxicos, usados para destruir uma escama de laranja, podemos eliminar uma grande parte da heterogeneidade se empregarmos uma laranja como um bloco. A superfície da laranja pode ser, digamos, dividida convenientemente em dois hemisférios que serão tratados, respectivamente, por dois dos preparados. O bloco consiste, então, em duas unidades.

Nos exemplos citados, temos disponível uma série de blocos. Não nos preocupa se o bloco é um par de gêmeos, um couro ou uma laranja. A estrutura lógica do experimento fica a mesma.

Suponhamos que pretendemos comparar cinco tratamentos ou variedades designadas por a, b, c, d, e. Vamos construir um esquema de todos os pares possíveis entre êstes tratamentos:

I	ab	VI	bd
II	ac	VII	be
III	ad	VIII	cd
IV	ae	IX	ce
V	bc	X	de

Existem dez pares, fato que se pode deduzir diretamente pela fórmula combinatória:

$$\frac{5!}{2! \quad 3!} = 10$$

Se tivermos dez blocos disponíveis, podemos pôr um destes pares em cada bloco. Dentro de cada bloco a unidade que receberá o tratamento designado pela primeira letra no quadro acima, será escolhida pelo lançamento de uma moeda.

O delineamento tem os seguintes característicos:

número de unidades por bloco	$k=2$
número de tratamentos ou variedades	$v=5$
número de repetições	$r=4$
número de blocos	$b=10$
número de unidades experimentais	$bk=rv=20$
número de vêzes que um determinado par de variedades cai no mesmo bloco	$\lambda=1$

Claro que o delineamento obedece à nossa primeira concição:

$$k < v$$

Obedecerá à segunda? Podemos concluir sem demonstração formal que sim, pelo seguinte raciocínio: o delineamento é simétrico em relação aos tratamentos. Seja qual fôr o par de letras escolhido, essas duas letras têm a propriedade de se juntar uma vez (e sòmente uma vez) em um bloco. Nota-se que a mesma simetria não se realiza em relação aos blocos. Os pares de blocos são de dois tipos: aquêles que têm um tratamento em comum e aquêles que não o têm. Verifica-se que do 1º tipo temos:

I e II com a em comum
I e V com b em comum

etc...

e do segunto tipo,

I e VIII
II e X

etc...

O número de pares de blocos que podemos formar de 10 blocos é

$$\frac{10 \times 9}{2} = 45$$

Dentro dêstes 45 pares, existem 30 do primeiro tipo e 15 do segundo. A falta de simetria em relação aos blocos, não nos importa, porque não interessa muito compararmos os blocos entre si.

Notamos que não é legítimo comparar a média das 4 repetições de a com a média das 4 repetições de b. As de a se encontram nos blocos I, II, III e IV; as de b nos blocos I, V, VI e VII. A diferença entre as médias das repetições de a e de b incluirá, portanto, o efeito das diferenças entre os blocos II, III e IV por um lado, e V, VI e VII por outro. São essas diferenças entre blocos que o experimento deve eliminar das comparações entre médias de tratamentos.

Vamos calcular uma estimativa da diferença entre cada tratamento e a média dos cinco tratamentos, eliminado desta diferença todo e qualquer efeito das diferenças entre blocos. É conveniente aqui representar pelas letras gregas correspondentes,

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \quad \varepsilon$$

os "verdadeiros" valores, isto é, os valores que se obteriam se o material experimental fôsse completamente uniforme, e se não houvesse êrro de observação. Procuramos, então, estimativas dos cinco desvios do tipo

$$\Delta\alpha = \alpha - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon}{5}$$

Esta expressão escreve-se

$$\frac{4}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta - \frac{1}{5}\gamma - \frac{1}{5}\delta - \frac{1}{5}\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{5}\left[(\alpha - \beta) + (\alpha - \gamma) + (\alpha - \delta) + (\alpha - \varepsilon)\right]$$

Ora, uma estimativa de cada uma destas 4 diferentas é fornecida pelo experimento e é uma estimativa que é inteiramente isenta dos efeitos das diferenças entre blocos.

A estimativa de $(\alpha - \beta)$ é a diferença (a - b) no bloco I; a estimativa de $(\alpha - \gamma)$ é a diferença (a - c) no bloco II, etc. Concluímos que a estimativa desvio $\Delta\alpha$, isenta dos efeitos dos blocos, é fornecida pela expressão:

$$\Delta a = \frac{1}{5}\left[(a-b)_{I} + (a-c)_{II} + (a-d)_{III} + (a-e)_{IV}\right]$$

em que o índice (I, II, etc.) indica o bloco onde procura mos as respectivas diferenças.

Verifica-se que uma expressão equivalente é

$$\frac{1}{5}\left[2\begin{bmatrix}\text{Total das re-}\\ \text{petições de } \underline{a}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Total dos blocos}\\ \text{que contêm } \underline{a}\end{bmatrix}\right]$$

Calculamos, do mesmo modo, as estimativas Δb, Δc, Δd e Δe dos desvios de cada variedade em referência à média geral. Se julgarmos desejável, podemos somar a média geral do experimento inteiro, para obter uma estimativa da média de cada variedade ou tratamento. Isto não é, contudo, necessário, visto que uma comparação entre duas médias é igual à comparação entre os desvios correspondentes.

2,11 __Êrro Padrão e Eficiência__

Pode ser demonstrado que a variância da diferença entre duas médias quaisquer é

$$\frac{8}{5} \times \frac{\sigma^2}{2}$$

onde σ^2 representa a variância de um só canteiro __dentro__ de um bloco.

Notamos que em um experimento de blocos ao acaso com o mesmo número de repetições (isto é, 4 blocos de 5 canteiros), a variância da diferença entre as duas médias seria

$$\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right]\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}$$

A variância de qualquer outra função das médias ficará multiplicada pelo mesmo fator 8/5. Se __a__, __b__, ..., __e__ representassem, por exemplo, cinco níveis de tratamento (digamos concentrações) de um agente tóxico proporcionais a 0, 1, 2, 3, 4, seria apropriado calcular o coeficiente de regressão que é uma função linear das médias com respectivos coeficientes.

-2 -1 0 +1 +2

A variância no caso de 4 blocos de 5 unidades seria então

$$\left[(-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (+1)^2 + (+2)^2\right]\sigma^2/4 = \frac{10}{4}\sigma^2$$

ao passo que é possível demonstrar que, no caso do delineamento em pares equilibrados, a variância será

$$\frac{8}{5} \times \frac{10}{4}\sigma^2$$

A análise estatística* é de fato, pouco mais complicada do que a análise em blocos ao acaso. As únicas modificações se referem ao ajustamento das médias e à introdução dêste fator 8/5.

Na hipótese da variância de uma unidade experimental ser a mesma tanto em blocos de duas, como em blocos de cinco (como aconteceria, por exemplo, em um ensaio de campo se todo o "êrro" fôsse devido a fatôres aleatórios não correlacionados com a posição no campo), o delineamento em pares equilibrados seria <u>menos</u> eficiente do que um experimento em blocos ao acaso, com o mesmo número de unidades.

O fato da variância ser multiplicada por 8/5, significaria então que o experimento em pares fornece apenas cinco oitavos da informação fornecida por um experimento do mesmo número de unidades, em blocos ao acaso. Denominamos, porisso, o fator 5/8, a <u>eficiência</u> do delineamento.

$$E = \frac{5}{8}$$

Mas não nos devemos esquecer que a redução do tamanho do bloco de 5 para 2 canteiros resulta quase sempre em uma redução da variância dentro do bloco. Se o desvio-padrão σ fôsse reduzido (digamos) de metade, (o que implica a divisão da variância por 4), teríamos uma eficiência líquida de

$$\frac{5}{8} \times 4 = \frac{5}{2}$$

Em outras palavras, para que o experimento em blocos ao acaso tivesse a mesma precisão que a do experimento em pares equilibrados, seria necessário empregar 50 unidades experimentais em vez de 20.

* Para o método vêr a introdução em Fisher & Yates.

Claro é que a vantagem realizada depende inteiramente da natureza da heterogeneidade do material experimental é sòmente no caso de o julgamento do pesquisador a êss respeito estar totalmente errado, que o delineamento e pares equilibrados sairá com menos precisão do que um de lineamento em blocos ao acaso.

2,12 Generalizações do Delineamento

O delineamento que acabamos de descrever pode ser rep tido quantas vêzes quisermos, de modo que o número de re petições pode ser 4, 8, 12, etc.

Um delineamento parecido, existe para qualquer número de variedades, porque de v variedades podemos formar

$$\frac{v\ (v - 1)}{2} \quad \text{pares}$$

O experimento terá então

$$\begin{array}{lrl} \text{número de blocos} & b = & \dfrac{v(v - 1)}{2} \\ \text{número de repetições} & r = & v - 1 \\ \text{número de unidades} & bk = & vr = v(v - 1) \end{array}$$

O fator de eficiência será, em geral:

$$E = \frac{v}{2(v - 1)}$$

2,13 Comparação com um Experimento feito com um Contrôle

Vamos agora, avaliar a vantagem do delineamento equil brado em comparação com o antigo método de introduzir u contrôle em cada bloco. Escolhendo a primeira varie dad como contrôle, podemos juntar a com cada uma das varieda des b, c, d, e, para construirmos quatro blocos de duas variedades.

ab ac ad ae

O delineamento equilibrado exige um mínimo de dez blocos Dois experimentos comparáveis (isto é, contendo o mesmo número de unidades experimentais), serão fornecidos, rep tíndo o delineamento com contrôle cinco vêzes, ou o deli neamento equilibrado duas vêzes.

Com contrôle					Equilibrado	
ab	ab	ab	ab	ab	ab bd	ab bd
ac	ac	ac	ac	ac	ac be	ac be
ad	ad	ad	ad	ad	ad cd	ad cd
					ae ce	ae ce
ae	ae	ae	ae	ae	bc de	bc de
Em cada experimento temos 20 blocos de 2 canteiros						

Desde que êstes dois experimentos empregam o mesmo número de blocos e o mesmo número de unidades experimentais, o custo será o mesmo nos dois.

No delineamento equilibrado a variância de uma diferença entre duas médias, será a metade da variância já citada para o caso de dez blocos,

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{5} \times \frac{\sigma^2}{2} = \frac{2}{5}\sigma^2$$

No experimento com um contrôle, a variância depende de uma das variedades comparadas ser, ou não, o contrôle. As comparações são dos dois tipos abaixo:

(i) (a-b) (a-c) (a-d) (a-e)
(ii) (b-c) (b-d) (b-e) (c-d) (c-e) (d-e)

Uma comparação do primeiro tipo pode ser feita diretamente nos cinco blocos onde se encontra a com outra variedade. A variância da diferença entre as duas médias é, portanto,

$$\frac{2}{5}\sigma^2$$

Para uma comparação do segundo tipo, digamos (b-c), temos que somar duas comparações (b-a) e (a-c). A variância da diferença será, portanto,

$$\frac{4}{5}\sigma^2$$

Resumindo as conclusões em uma tabela, temos as seguintes variâncias:-

Comparações	Experimento com um contrôle	Delineamento equilibrado
4 do tipo (a-b)	$\frac{2}{5}\sigma^2$	$\frac{2}{5}\sigma^2$
6 do tipo (b-c)	$\frac{4}{5}\sigma^2$	

É agora evidente que a vantagem do delineamento equilí brado não está sòmente no fato de serem iguais as variân cias de tôdas as comparações entre médias. Esta variân· cia é também, de modo geral, menor que as variâncias no c so de um experimento feito com um contrôle. De fato, é gual neste caso à variância de 4 das diferenças entre mé· dias e apenas um meio da variância das seis outras. Par obter, com estas seis diferenças, a mesma variância, $2\sigma^2/$ que se obteve por tôdas as diferenças no delineamento equ librado, seria necessário dobrar o tamanho do experimentc fazendo-o com 40 blocos em vez de 20.

Concluimos, porisso, que o delineamento equilibrado mais eficiente: para um mesmo gasto de tempo e dinheiro, dá mais informação, isto é, avalia as comparações (ou pel menos algumas das comparações) entre as médias com mais a ta exatidão.

2,2 <u>Delineamentos com três Unidades por Bloco</u>

Passando para o caso de haver três unidades experimen- tais (canteiros) por bloco, vemos que é sempre possível construir um delineamento equilibrado, escolhendo todos o grupos de três entre os $\underline{v}$ tratamentos ou variedades. Co cinco tratamentos teremos 10 blocos que são de fato os co plementos dos 10 blocos do delineamento já considerado (complemento de <u>ab</u> quer dizer <u>abcde</u> - <u>ab</u> = <u>cde</u>)

I	c	d	e	VI	a	c	e
II	b	d	e	VII	a	c	d
III	b	c	e	VIII	a	b	e
IV	b	c	d	IX	a	b	d
V	a	d	e	X	a	b	c

Notamos aqui que o número de vêzes que se juntam, em u mesmo bloco, duas variedades quaisquer, é:

$$\lambda = 3$$

(Por exemplo, <u>c</u> e <u>d</u> encontram-se sòmente nos blocos I, I e VII).

Para assegurar, em geral, a igualdade das variâncias de tôdas as comparações entre médias de variedades, não é necessário, contudo, escolher todos os grupos de três. A condição essencial é que o número de vêzes que duas variedades se encontram juntas em um mesmo bloco seja igual, para todo e qualquer par de variedades.

No caso de cinco variedades, a solução dada acima é a única que existe. Mas, consideremos agora o problema de seis variedades. O número de grupos de três é:

$$\frac{6!}{3! \quad 3!} = 20$$

É possível, contudo, escolher um subgrupo de dez dêstes blocos que obedeça à condição necessária. Consideremos o seguinte esquema:

I	a	b	c	VI	b	c	f
II	a	b	d	VII	b	d	e
III	a	c	e	VIII	b	e	f
IV	a	d	f	IX	c	d	e
V	a	e	f	X	c	d	f

Verificamos que cada par aparece em um mesmo bloco duas vezes; por exemplo, d com f nos blocos IV e X. Temos assim um delineamento equilibrado com a seguinte especificação:

número de repetições	$r = 5$
número de variedades	$v = 6$
número de unidades por bloco	$k = 3$
número de blocos	$b = 10$
	$\lambda = 2$

2,3 O Problema Geral

O problema prático do delineamento de um experimento em blocos incompletos equilibrados, é resolvido com o auxílio das tabelas de Fisher & Yates. Aí se encontrará um catálogo de todos os delineamentos até hoje descobertos para $k \leq 10$ e $r \leq 10$. Muitos dêles foram inventados empìricamente.

Publicamos em 1939 um trabalho intitulado "The Completely Orthogonalized Latin Square", que ligou o delineamento de experimentos ao mais recente e mais abstrato ramo da Matemática - a Teoria dos Grupos. Percebeu-se paulatinamente que todos êstes delineamentos representam aspectos da teoria de grupos. Constitui êsse caso mais um exemplo de que mesmo a Matemática mais pura, tem que sempre sofrer na deshonra de ser aplicada por homens práticos. O delineamento de experimentos não foi de fato a primeira aplicação da teoria de grupos; já tinha sido aplicada por Dirac nas investigações da estrutura do átomo

Certos aspectos da teoria de grupos podem ser interpretados geomètricamente. Nós estamos acostumados a pensar que existe um número infinito de pontos, bem como um número infinito de retas em um plano. Mas isto não é necessário para construir uma geometria. Uma geometria plana consiste meramente de uma coleção de coisas chamadas "pontos" e uma coleção de coisas chamadas "retas", tais que:

(i) - dois pontos quaisquer determinam uma única reta (a reta que liga os pontos)
(ii) - duas retas quaisquer determinam um único ponto (o ponto de intercessão das retas).

Podemos construir uma geometria com sete pontos e sete retas como nos mostra a figura 1. Verifica-se que existe uma só reta entre dois pontos quaisquer e que duas retas se interceptam em um só ponto. É possível apresentar a crítica de que a reta V é, na realidade, um círculo. Mas para estabelecer esta crítica, é necessário aplicar a geometria do espaço em que se situa o crítico. A um ser que vivesse neste universo de sete pontos e sete retas, a linha através dos pontos b e f apareceria como uma reta.

2,41 O Delineamento de Sete Variedades em Blocos de Três

Esta geometria de sete pontos e sete retas nos dá diretamente um delineamento de blocos incompletos equilibrados com sete variedades em blocos de três.

Os pontos representam as variedades e as retas definem os blocos. Segue-se que duas variedades quaisquer se encontram juntas em um bloco, uma só vez.

I	a b c	IV	b d g
II	a d e	V	b e f
III	a f g	VI	c d f
		VII	c e g

Notamos a simetria entre pontos e retas ou, igualmente, entre variedades e blocos. Duas variedades quaisquer se encontram uma só vez em um bloco. Reciprocamente, dois blocos quaisquer têm uma e sòmente uma variedade em comum.

Como resultado disso, tôdas as comparações entre blocos podem ser feitas com a mesma precisão, embora geralmente não nos interesse estudar tais comparações.

O mesmo delineamento pode ser gerado de uma outra maneira. Desenhamos um quadro quadriculado em sete por sete. Escolhemos três diagonais especiais do quadrado, indicadas na figura por letras gregas. As colunas representam as variedades e as filas os blocos. O bloco contém apenas as variedades indicadas por uma letra grega. O bloco I, por exemplo, conterá a (α), b (β), c (γ), e o bloco II conterá a (γ), d (α), e (β). Notamos que cada bloco contém as três letras gregas e que cada variedade aparece nas três letras gregas. Êste fato é aproveitado em um delineamento mais complexo (o quadrado Youden), que examinaremos mais tarde.

Mais simplesmente, podemos construir o delineamento da seguinte maneira: Tomamos para o primeiro bloco as letras a b d. Fazemos uma substituição cíclica, a para b, b para c, c para d, d para e, etc., e, finalmente, g para a. Repetimos essa substituição mais cinco vêzes. Temos então:

a b d   b c e   c d f   d e g   e f a   f g b   g a c
(a b d)

A solução é essencialmente a mesma, mas a designação das variedades e a ordem dos blocos é diferente.

2,42 Treze Variedades em Vinte e seis Blocos de Três

O método de substituição cíclica pode ser usado para construir um delineamento, com a seguinte especificação:

repetições	$r = 6$
variedades	$v = 13$
unidades por blocos	$k = 3$
blocos	$b = 26$
	$\lambda = 1$

Começando com um bloco a b e e substituindo, sucessivamente a por b, b para c, ..., m para a, produzimos os treze blocos seguintes:

a b e	d e h	g h k	j k a	m a d
b c f	e f i	h i l	k l b	
c d g	f g j	i j m	l m c	

Começando de novo com a c h, produzimos os treze blocos:

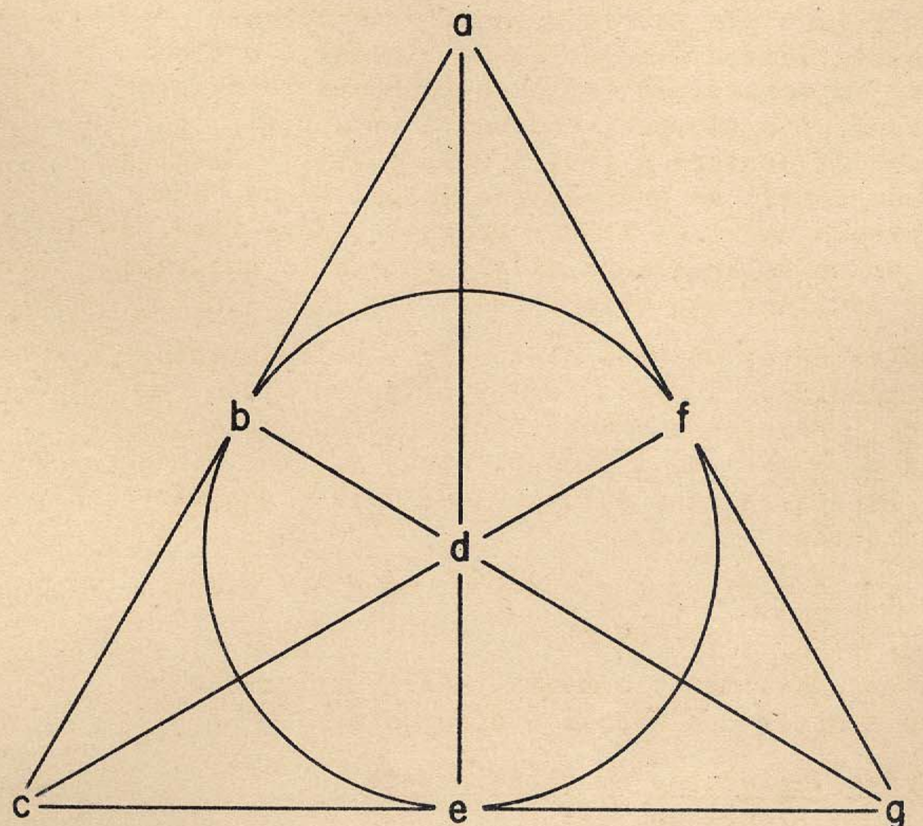


Fig. 1: Geometria finita de 7 pontos e 7 retas.

Variedade

Bloco	a	b	g	c	d	e	f
I	α	β		γ			
IV		α	β		γ		
VII			α	β		γ	
VI				α	β		γ
II	γ				α	β	
V		γ				α	β
III	β		γ				α

Fig. 2: 7 variedades em 7 blocos de 3.

a c h	d f k	g i a	j l d	m b g
b d i	e g l	h j b	k m e	
c e j	f h m	i k c	l a f	

Verificamos que duas variedades quaisquer caem juntas em um bloco uma vez e sòmente uma vez. Neste delineamento, ficam perdidas as relações simétricas entre os blocos, notadas no caso de sete variedades em blocos de três. Alguns dos pares de blocos têm uma variedade em comum: outros pares não a têm.

2,43 Nove Variedades em Doze Blocos de Três

Consideremos o Quadrado Grego-Latino 3 x 3:

Aα	Bβ	Cγ
Cβ	Aγ	Bα
Bγ	Cα	Aβ

Vamos colocar as nove variedades nas nove células do quadrado

a	b	c
d	e	f
g	h	i

e depois, separar os grupos de três variedades que correspondem, respectivamente, às filas, colunas, letras latinas e letras gregas do quadrado.

Teremos, assim, doze blocos:

Filas	Colunas	Letras Latinas	Letras Gregas
a b c	a d g	a e i	a f h
d e f	b e h	b f g	b d i
g h i	c f i	c d h	c e g

As condições de ortogonalidade às quais obedece o quadrado grego-latino, garantem que duas variedades quaisquer se juntam uma só vez em um bloco. O arranjo representa, portanto, um delineamento equilibrado com os seguintes característicos:

repetições	$r = 4$
variedades	$v = 9$
unidades por bloco	$k = 3$
blocos	$b = 12$
	$\lambda = 1$

2,44 Outras Soluções com Três Unidades por Bloco

Além dos exemplos já dados, o catálogo em Fisher & Yates dá as soluções para $k = 3$ e

número de repetições	número de variedades	número de blocos
9	10	30
7	15	35
9	19	57
10	21	70

É demonstrável que tôdas as soluções possíveis com $k = 3$ e $r \leq 10$ já são conhecidas: quando uma solução não se encontra no catálogo é porque não existe.

Apontamos, contudo, que a solução relativa a 13 variedades em blocos de 3 unidades apresentada em secção 2,43 é nova, pois a solução dada em Fisher & Yates (Nº 4) não é cíclica. Temos duas outras novas soluções cíclicas que apresentaremos mais tarde.

2,5 Delineamentos com mais de Três Unidades por Bloco

Ainda não existe um método geral para a construção de blocos incompletos equilibrados. Temos apenas uns poucos métodos para a construção de certas famílias de soluções. O quadrado latino completamente ortogonal, dá-nos duas tais famílias de soluções. A solução já dada em secção 2,43 de nove variedades em blocos de três é o primeiro membro de uma destas famílias. Para obter o segundo, empregamos um quadrado 4 x 4 com três classificações ortogonais além de filas e colunas. Teremos, assim, a solução de delineamento especificado por

$$r = 5 \quad v = 16 \quad k = 4 \quad b = 20 \quad \lambda = 1$$

Em geral, um quadrado latino completamente ortogonal com β elementos dá um delineamento com

$$r = q+1 \quad v = q^2 \quad k = q \quad b = q(q+1) \quad \lambda = 1$$

Mas o que é interessante é que, ainda hoje, não se sabe exatamente os valores possíveis de q. Mostramos em 1939, que existe uma solução se

$$q = p^n$$

onde p é número primo qualquer e n qualquer número inteiro. Temos, porisso, soluções para os casos em que

$$q = 3, \quad 4(=2^2), \quad 5, \quad 7 \quad 8(=2^3), \quad 9(=3^2), \quad 11, \quad 13 \text{ et}$$

Fisher já tinha demonstrado em 1934, que realmente não existe um quadrado grego-latino de 6 x 6 elementos. Uma solução com q = 6 (36 variedades em blocos de 6) é porisso impossível.

Mais recentemente, MacNeish demonstrou que um quadrado grego-latino é impossível se

$$q = 4\,n + 2$$

onde n é qualquer número inteiro. Segue-se que as soluções para q = 6, 10, 14 etc., não existem. Nos casos em que q = 12, 15, etc., não conhecemos nem uma solução de blocos incompletos equilibrados e tão pouco sabemos se uma tal solução pode existir.

Da mesma série de quadrados latinos completamente ortogonais, podemos construir uma segunda família de delineamentos. Começamos como no caso de 9 variedades em 12 blocos de 3 (secção 2,43), mas a cada fila juntamos a letra j, a cada coluna a letra k, a cada letra latina a letra l e a cada letra grega a letra m. Finalmente, juntamos j, k, l, m num só bloco. Obtemos assim o seguinte delineamento:

Por filas	Colunas	Letras Latinas	Letras gregas	e mais um bloco
a b c j	a d g k	a e i l	a f h m	
d e f j	b e f k	b f g l	b d i m	j k l m
g h i j	c f i k	e d h l	c e g m	

Verificamos que o delineamento obtido é equilibrado com a especificação seguinte:

$$r = k = 4 \quad v = b = 13 \quad \lambda = 1$$

De um quadrado latino completamente ortogonal de elementos, podemos da mesma maneira, construir um delineamento equilibrado com

$$r = k = q + 1 \qquad v = b = q^2+q + 1 \qquad \lambda = 1$$

Os delineamentos desta família correspondem a geometrias finitas de $q^2 + q + 1$ pontos e $q^2 + q + 1$ retas. A geometria finita já apresentada, com 7 (= $2^2 + 2 + 1$) pontos e 7 retas, é de fato o primeiro membro da família.

Os primeiros sete delineamentos desta família (com q = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9) têm todos uma solução cíclica, como já vimos no caso de 7 variedades em 7 blocos (secção 2,41). Com 13 (=$3^2 + 3 + 1$) variedades em 13 blocos de 4, por exemplo, temos a solução cíclica, gerada a partir do bloco a b d j:

Bloco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Variedades	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	a
	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	a	b	c
	j	k	l	m	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Não sabemos, contudo, se todos os membros da família (isto é, delineamentos com $q^2+ q + 1$ variedades em $q^2+ q + 1$ blocos) podem ser gerados pelo método de substituição cíclica.

Existem, por outro lado, soluções cíclicas além daquelas que pertencem a essa família. Um exemplo é o delineamento com 19 variedades em 19 blocos de 9 (9 repetições e $\lambda = 4$). Verificamos que, embora 19 não seja do tipo $q^2 + q + 1$, uma solução cíclica pode ser obtida por substituição do primeiro bloco

a c e f g h k n o

Já demos um exemplo (secção 2,42) de uma solução cíclica em dois grupos de blocos. Outras soluções do mesmo tipo se encontram no catálogo. Existem também algumas soluções dicíclicas. Consideremos o caso de 16 variedades em 16 blocos de 6 (6 repetições e $\lambda = 2$). Vamos designar as 16 variedades pela associação das quatro letras, a, b, c, d aos quatro índices, 1, 2, 3, 4. Começando com o bloco de seis variedades

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad b_1 \quad c_4 \quad d_1$$

podemos fazer dois ciclos de substituições; das letra
(a-b-c-d-a) e dos índices (1-2-3-4-1), produzindo assim
16 blocos

$a_1\ a_2\ a_3\ b_1\ c_4\ d_1$	$a_2\ a_3\ a_4\ b_2\ c_1\ d_2$	$a_3\ a_4\ a_1\ b_3\ c_2$
$b_1\ b_2\ b_3\ c_1\ d_4\ a_1$	$b_2\ b_3\ b_4\ c_2\ d_1\ a_2$	$b_3\ b_4\ b_1\ c_3\ d_2$
$c_1\ c_2\ c_3\ d_1\ a_4\ b_1$	$c_2\ c_3\ c_4\ d_2\ a_1\ b_2$	$c_3\ c_4\ c_1\ d_3\ a_2$
$d_1\ d_2\ d_3\ a_1\ b_4\ c_1$	$d_2\ d_3\ d_4\ a_2\ b_1\ c_2$	$d_3\ d_4\ d_1\ a_3\ b_2$

$a_4\ a_1\ a_2\ b_4\ c_3\ d_4$
$b_4\ b_1\ b_2\ c_4\ d_3\ a_4$
$c_4\ c_1\ c_2\ d_4\ a_3\ b_4$
$d_4\ d_1\ d_2\ a_4\ b_3\ c_4$

2,6 <u>As Lacunas no Catálogo de Soluções</u>

Para os fins práticos, limitamo-nos aos casos de $r \leq$ e $k \leq 10$. Dentro dêstes limites encontramos no catálog 12 especificações sem uma solução. O fato de a especif cação constar do catálogo, indica que ainda não foi demo trada a impossibilidade de uma solução.

As lacunas são:

replicações r	variedades v	blocos b	unidades k
7	15	21	5
7	22	22	7
8	21	28	6
8	29	29	8
9	16	24	6
9	25	25	9
9	46	69	6
10	21	30	7
10	31	31	10
10	36	45	8
10	46	46	10
10	51	85	6

Caso um leitor pudesse descobrir uma solução ou uma d monstração da impossibilidade de obter uma solução de qualquer um dêsses delineamentos, isso seria, para a Es tística, de tanto valor prático, como de valor teórico.

2,7 Soluções cíclicas

As soluções cíclicas são procuradas porque permitem a construção de um outro tipo de delineamento que vamos estudar na secção a seguir. Descobrimos recentemente três soluções cíclicas para delineamentos que têm apenas soluções não-cíclicas em Fisher & Yates. A primeira já foi dada em secção 2,42. As duas outras são:

(i) 9 variedades em 18 blocos de 4 (18 repetições e $\lambda=3$) que se derivam, em dois grupos de blocos, por meio de substituição cíclica nos blocos

a b c e   a d f i

(ii) 19 variedades em 57 blocos de 3 em três grupos de blocos derivados de

a b f   a c i   a d k

Pode ser demonstrado que nenhuma outra solução cíclica pode existir dentro das especificações cujas soluções já estão tabuladas no catálogo*.

3 - QUADRADOS YOUDEN

3,1 Considerações Gerais

Em geral, um delineamento em blocos incompletos equilibrados elimina um só fator de heterogeneidade - a heterogeneidade entre blocos. O delineamento pode ser considerado por isso como uma generalização do delineamento em blocos ao acaso. Recordamos que o quadrado latino, por outro lado, elimina no campo a heterogeneidade em dois sentidos ou, no caso mais geral, segundo duas classificações ortogonais. Queremos saber se existe uma generalização do quadrado latino, que nos permita uma dupla eliminação de heterogeneidade.

3,2 O Quadrado Youden

Foi observado por Youden que no caso de $b = v$ (e portanto $r = k$) cada variedade pode ser associada uma só vez com cada posição em cada bloco. Já exemplificamos essa estrutura no caso de 7 variedades com 7 blocos de 3 (secção 2,41). Alí cada variedade se associa uma só vez a cada letra grega e cada bloco contém as três letras gre -

* A 3ª edição das tabelas contém soluções cíclicas para 13 e 19 variedades, em blocos de 3, mas a nossa solução cíclica de 9 em blocos de 4, é uma.

gas. Em outras palavras, a classificação de unidades s gundo as letras gregas é ortogonal, tanto com a classifi cação em blocos como com a classificação em variedades. Se tivermos um outro critério, segundo o qual se possa classificar, em três tipos, as três unidades de cada bl co, tôda a heterogeneidade atribuível a esta classifica ção pode ser eliminada das comparações entre as médias d tratamentos.

Se se tratasse, por exemplo, de um ensaio de campo pa ra comparar 7 variedades, poderíamos arranjar o plano se gundo o esquema:

a b c d e f g
b c d e f g a
d e f g a b c

(As filas, colunas e letras devem ser subsequentemente sualizadas). Notamos que cada letra aparece uma só ve em cada fila. Podemos assim eliminar não sòmente as di ferenças entre colunas, mas também entre as filas. O de lineamento é de fato uma generalização do quadrado latin e, considerado desta forma, poderia ser chamado um "retâ gulo latino".

Um delineamento do tipo quadrado Youden existe não s mente no caso de b = v, mas por tôdas as soluções cícli cas. Por exemplo, no caso de 13 variedades em 26 bloco de 3 (secção 2,42), verificamos que cada letra aparece <u>duas</u> vêzes em cada posição no bloco, uma vez no primeiro grupo de blocos e uma vez no segundo grupo. As diferen ças entre posições podem ser assim eliminadas fàcilment

3,3 <u>Exemplo Prático</u>

Acentuamos que as classificações encontradas no deli neamento de experimentos, colunas, filas, blocos, etc., não têm necessàriamente um significado topográfico com num ensaio de campo. Para exemplificar êste fato, vamo planejar um experimento que aproveitará à solução cícli de 9 variedades em 18 blocos de 4.

Suponhamos que uma companhia de transporte quer comp rar as resistências de diversas marcas de pneus, não laboratório, mas nas condições reais de serviço. Supo nhamos mais que ela se interessa em 9 marcas diferentes

O mais simples experimento que podemos sugerir é o se guinte: equipar 9 ônibus, respectivamente, com as 9 ma cas de pneus. Depois de 10.000 Km (digamos) de uso, v nos examinar os pneus e compará-los segundo um critério conveniente - talvez o número de milímetros de borracha gasta. Para obter uma estimativa do êrro experimental, seria necessário arranjar pelo menos uma repetição. Temos, então, que empregar 18 ônibus no experimento. Se êsses fôssem divididos em dois grupos (vamos dizer um grupo de 9 usados na cidade e outro grupo de nove usados nos serviços interurbanos), o delineamento seria simplesmente um exemplo de blocos ao acaso - 2 blocos de 9 unidades cada.

Vamos agora estudar a natureza da heterogeneidade que devemos esperar. Claro é que a condição de que os pneus sejam examinados depois de 10.000 Km não é suficiente para garantir que todos sejam sujeitos ao mesmo tratamento. É possível que os 18 ônibus sejam empregados em diversas rotas e que algumas destas percorram ruas bem calçadas, ao passo que outras sigam ruas cheias de pedras e buracos. Vemos, então, que haverá grandes diferenças entre os diversos ônibus, atribuíveis às diferenças entre as rotas e a outros fatôres, tais como o cuidado do motorista, condição dos freios, etc.

Sugerimos, porisso, um melhoramento do delineamento. Podemos tratar de um ônibus como um bloco e as quatro rodas com os quatro canteiros ou talhões de um bloco. Ficam assim eliminadas tôdas as diferenças gerais entre um ônibus e outro. Temos 9 marcas de pneus e podemos pôr sòmente 4 em cada bloco. A solução do problema já é fornecida pelo delineamento de 9 variedades em blocos de 4 (secção 2,7). Não devemos esquecer que as marcas são designadas ao acaso entre as 9 letras a....i, que os 18 ônibus são distribuídos ao acaso entre os 18 blocos e que dentro de cada bloco as 4 marcas são colocadas ao acaso nas 4 rodas dos ônibus.

Mas aqui pensamos num novo aspecto do problema de heterogeneidade. As quatro rodas de um ônibus não são quatro rodas indiferentes (como, por exemplo, quatro porcos de uma ninhada). Cada roda pode ser classificada segundo a posição - da frente à esquerda ou à direita e de trás, à esquerda ou à direita. Ora, é certo que existirão diferenças gerais entre as quatro posições: as rodas trazeiras, por exemplo, suportam mais pêso que as dianteiras ou que as rodas da direita sofrem maior desgaste devido às pedras da margem da rua. Não é necessário saber a natureza nem a magnitude dessas diferenças: é suficiente adivinhar que existem dife-renças gerais atribuíveis à posição da roda.

Será possível eliminar do experimento aquela parte do êrro experimental que é atribuível à posição da roda? Sim, por que o delineamento é construído por meio de uma substituição cíclica e cada letra (marca) aparece exata-mente duas vêzes em cada posição.

O esquema será o seguinte:

Ônibus nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frente, esquerda	a	b	c	d	e	f	g	h	i
" direita	b	c	d	e	f	g	h	i	a
Detrás, esquerda	c	d	e	f	g	h	i	a	b
" direita	e	f	g	h	i	a	b	c	d

Ônibus nº	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Frente, esquerda	a	b	c	d	e	f	g	h	i
" direita	d	e	f	g	h	i	a	b	c
Detrás, esquerda	f	g	h	i	a	b	c	d	e
" direita	i	a	b	c	d	e	f	g	h

Como antes, as marcas são designadas pelas letras ao acaso os ônibus são numerados de 1 ...a 18 ao acaso. Semelhantemente, as quatro posições de roda são associadas ao acaso com as quatro filas do esquema, mas as quatro marcas deixam de ser colocadas ao acaso nas quatro posições.

Chegamos assim a um delineamento que elimina das comparações entre as médias das 9 marcas não sòmente as diferenças gerais entre os 18 ônibus, mas também as diferenças gerais entre as quatro posições da roda.

Apontamos também que, graças à ortogonalidade de posição com bloco e variedade, o experimento fornecerá gratuitamente informação acêrca das diferenças entre as quatro posições.

C O N C L U S Ã O

Temos que deixar para uma segunda parte dêste trabalho um estudo de "confundimento" (confounding), que consiste numa coleção de métodos ainda mais gerais para a redução do número de unidades por bloco. Històricamente, o método de "confundimento" é mais velho do que o método de blocos incompletos equilibrados. Começamos, contudo, com êste por ser um campo bastante bem definido e quase completo em si mesmo, embora seja na realidade apenas um caso especial do método de "confundimento".

Em conclusão, devemos frizar que os delineamentos descritos neste trabalho, além de serem interessantes ao estudante da teoria de grupos, representam, para nós, uma economia de cruzeiros e centavos. A não ser que o número de variedades ou tratamentos seja muito pequeno, a redução de número de variedades por bloco resulta quase sempre numa diminuição do êrro experimental. Essa diminuição não tem que ser muito grande para justificar o emprêgo de blocos incompletos equilibrados. Assim, uma redução de sòmente 10% no êrro-padrão de um ensaio de variedades, que custará 50 contos, é equivalente a uma economia de 10 contos. É verdade que a Secção de Estatística terá que dedicar um pouco mais de tempo à análise dos resultados, mas os estatísticos não são tão bem pagos que isso anulará o dinheiro poupado no campo e no laboratório.

REFERÊNCIAS

1. Fisher, R.A. and Yates, F. (1943) Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research. Oliver and Boyd, Ltd., London

2. Stevens, W.L. (1939) The Completely Orthogonalised Latin Square Annals of Eugenics, IX 82-93.

3. Yates, F. (1936) Incomplete Randomised Blocks. Annals of Eugenics VII 121-140.

TESTE DE BARTLETT

A. Conagin

Introdução

Designa-se por análise da variância o processo que consiste na partição ortogonal da soma dos quadrados dos desvios da média geral de um certo número de observações e dos respectivos gráus de liberdade, fornecendo cada uma das partes resultantes, uma estimativa da variância.

Êste processo pode ser utilizado para fornecer soluções a dois problemas fundamentalmente diferentes. (1)

Classe I = Detecção e estimação de relações fixas (constantes) entre as médias de sub-conjuntos de um universo de objetos. Esta classe inclui os problemas usuais de estimar e pôr em prova a hipótese da existência de diferenças reais entre médias de tratamentos, de variedades etc. Admitindo-se o caso de uma classificação dupla, a variável X_{ij} para os problemas desta classe é definida como:

$$X_{ij} = m_{ij} + Z_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2, \ldots\ldots, r \\ j = 1,2, \ldots\ldots, c \end{array}$$

onde $m_{ij} = m_{..} + (m_{i.} - m_{..}) + (m_{.j} - m_{..})$

sendo $m_{i.} = \frac{1}{c}\sum_j m_{ij}$, $m_{.j} = \frac{1}{r}\sum_i m_{ij}$

e $m_{..} = \frac{1}{rc}\sum_i\sum_j m_{ij}$

Neste caso, as pressuposições necessárias e suficientes para a validez das inferências feitas são:

a) - Variáveis aleatórias - Os valores X_{ij} são valores observados de variáveis aleatórias, distribuídas ao redor das respectivas médias verdadeiras m_{ij}, que são constantes fixas.

b) - Aditividade - O parâmetro m_{ij} é composto de três componentes $m_{..}$, $(m_{i.} - m_{..})$ e $(m_{.j} - m_{..})$ que são aditivos.

c) - Variâncias iguais e Correlação nula - As variáveis X_{ij} são homocedásticas e independentes, isto é, têm u variância comum σ^2 e a covariância entre elas é nula.

d) - Normalidade - As variáveis X_{ij} distribuem-se conjuntamente em uma distribuição normal multidimensional.

Classe II - Detecção e estimação dos componentes de variações casuais associados em uma população composta.

Quando consideramos êstes problemas, isto é, quando os parâmetros são variáveis aleatórias, as seguintes pressuposições são necessárias:

a) - Variáveis aleatórias - Os números X_{ij} são valores observados de variáveis aleatórias que se distribuem ao redor de um valor médio comum $m_{..}$, o qual é uma constante fixa.

b) - Aditividade dos Componentes - As variáveis X_{ij} são somas de variáveis aleatórias componentes, isto é:

$$X_{ij} = m_{..} + (m_{i.} - m_{..}) + (m_{.j} - m_{..}) + Z_{ij}$$

onde $(m_{i.} - m_{..})$, $(m_{.j} - m_{..})$ e Z_{ij} são variáveis aleatórias.

c) - Variâncias homogêneas e Correlação nula - As variáveis $(m_{i.} - m_{..})$, $(m_{.j} - m_{..})$ e Z_{ij} são distribuídas com variâncias σ^2_r, σ^2_c e σ^2, respectivamente e tôdas as covariâncias entre elas são nulas.

d) - Normalidade - As variáveis $(m_{i.} - m_{..})$, $(m_{.j} - m_{..})$ e Z_{ij} são tôdas normalmente distribuídas.

Desde que sejam preenchidos conjuntamente os ítens (c) e (d), teremos a independência dos $(m_{i.} - m_{..})$ dos $(m_{.j} - m_{..})$ e dos Z_{ij} e, portanto, dos X_{ij}. Assim, a independência dos X_{ij} fica assegurada.

Vemos, pois, a necessidade, nos processos habituais de análise da variância, da existência de normalidade nos dados e da homocedasticidade das variâncias dos X_{ij}.

Uma prova de homogeneidade das variâncias torna-se, então, necessária.

Quando temos ùnicamente duas amostras, a prova de homogeneidade é efetuada pelo teste de F, colocando-se no numerador a variância maior e no denominador a variância menor, entrando-se na tabela com os respectivos gráus de liberdade.

A hipótese de homocedasticidade não sendo rejeitada, permite que se ponha em prova, em seguida, a hipótese de nulidade (as duas médias de amostras não diferem).

Quando o número de amostras é maior ou quando planos experimentais dos tipos blocos ao acaso, quadrado latino, et são usados, o teste apropriado para pôr em prova a homogeneidade das variâncias é o teste de Bartlett.

TESTE DE BARTLETT

- Sua origem -

As hipóteses postas em prova em um experimento são julgadas estatìsticamente pela escolha de uma região de rejeção apropriada.

A distribuição de F, por exemplo, é utilizada para pôr em prova a hipótese de que as duas amostras independentes provêm de uma população com distribuição normal e variâncias iguais.

Uma escolha intuitiva da região de rejeição basear-se-ia no raciocínio de que, quanto maior o valor de F, menos confiança pode ter o experimentador na veracidade da hipótese.

Para certos testes estatísticos, a escolha da região d rejeição é feita intuitivamente. Não obstante, surgiu necessidade da formulação de princípios lógicos que permitissem a escolha de testes apropriados. Essa formulação foi devida a Neyman e Pearson (2) que, baseados na possibilidade de serem cometidos dois tipos de erros, procuraram fixando a probabilidade de rejeitar a hipótese de nulidad quando verdadeira (êrro do tipo I), reduzir ao mínimo possibilidade de aceitá-la quando falsa (êrro do tipo 2).

Às vêzes, as hipóteses são muito simples. Mesmo assim nem sempre é possível escolher-se uma região que goze d propriedade de ser a mais eficiente para o conjunto de tôdas as hipóteses alternativas consideradas. É possível, em certos casos, com o uso de restrições no conjunto de hipóteses alternativas, obter ainda regiões sempre mais eficientes na rejeição da hipótese de nulidade.

Existe uma outra base para a escolha de testes eficientes através da razão de máxima verossimilhança.

Consiste em determinar-se para um certo valor da amostra (x_1, x_2, ... x_n) qual a estimativa do parâmetro que t na essa densidade máxima. Testes estatísticos muito efi cientes podem ser escolhidos a partir dêsse princípio.

Suponhamos que a função de distribuição de uma amostra de n valores da variável x dependa de um único parâmetro θ e que a hipótese a ser posta em prova é que $\theta = \theta_o$. A densidade conjunta é:

$$P = f(x_1/\theta) \cdot f(x_2/\theta) \cdots f(x_n/\theta) \qquad (1)$$

O valor $\hat{\theta}$ que torna máxima a (1) é denominado estimativa de máxima verossimilhança.

Para determinar essa estimativa, consideram-se as variáveis $x_1, x_2, \ldots x_n$ da amostra como fixas e derivamos em relação a θ.

O valor $\hat{\theta}$ que torna $\frac{dP}{d\theta} = 0$ é a estimativa de máxima verossimilhança.

Seja $P_m(\hat{\theta})$ o valor máximo desta função e seja $P(\hat{\theta}_o)$ o valor da função se a H_o é verdadeira. A relação

$$\lambda = \frac{P(\hat{\theta}_o)}{P_m(\hat{\theta})} \qquad (2)$$

é denominada razão de verossimilhança da amostra.

Desde que $\hat{\theta}$ representa os valores para tôdas as hipóteses possíveis e θ_o é o valor para a hipótese de nulidade, o valor λ satisfaz a desigualdade $0 \leq \lambda \leq 1$.

O critério escolhido para a rejeição da hipótese de nulidade fica sendo

$$P\left[\lambda \leq \lambda_o\right] = 0{,}05$$

Se, em vez de um parâmetro único (caso em que a hipótese é denominada simples), tivermos k parâmetros total ou parcialmente especificáveis pela hipótese formulada, teremos hipóteses compostas.

Seja $P_m(x_1, \ldots x_n ; \hat{\theta}_1 \ldots \hat{\theta}_k)$ a densidade em probabilidade se as alternativas são verdadeiras; e $P(x_1, \ldots x_n ; \hat{\theta}'_1 \ldots \hat{\theta}'_k)$ se a hipótese de nulidade é verdadeira. Então,

$$\lambda = \frac{P(x_1, \ldots x_n ; \hat{\theta}'_1 \ldots, \hat{\theta}'_k)}{P_m(x_1, \ldots x_n ; \hat{\theta}_1 \ldots, \hat{\theta}_k)} \qquad (3)$$

Resta escolher

$$P\left[\lambda \leq \lambda_o\right] = 0{,}05$$

e rejeitar ou não a hipótese de nulidade.

Bartlett determinou uma função de λ para pôr em prova a homogeneidade de variâncias quando dispomos de k amostras.

Consideremos k populações normais, com as médias m_i e variâncias σ_i^2 $(i = 1, 2, \ldots k)$

Sejam as amostras de tamanho n_i $(i = 1, \ldots k)$ tiradas ao acaso dessas populações. A hipótese a ser posta em prova é:

$$H'_o \therefore \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2 \quad (4$$

Na amostra i as variáveis x_{ij} são em número de n_i.

Para simplicidade da notação, a densidade em probabilidades conjunta, será designada por $P(x_{ij}; m_i, \sigma_i)$ onde x_{ij} indica a soma de tôdas as variáveis, m_i e σ_i os parâmetros em número de k de cada tipo.

Então, se H' é verdadeira (as altenativas) temos:

$$(5) \quad P(x_{ij}; m_i, \sigma_i) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i}^{k}\sum\limits_{j}^{n_i}\left[\frac{x_{ij} - m_i}{\sigma_i}\right]^2}}{(2\pi)^{n/2}\,\sigma_1^{n_1}\,\sigma_2^{n_2}\ldots\sigma_k^{n_k}}$$

Quando a hipótese de nulidade é verdadeira, temos:

$$(6) \quad P(x_{ij}; m_i, \sigma) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i}^{k}\sum\limits_{j}^{n_i}\left[\frac{x_{ij} - m_i}{\sigma}\right]^2}}{(2\pi)^{n/2}\,\sigma^n}$$

Para obtermos λ é necessário tornar máximas as densidades (5) e (6) com relação aos seus parâmetros*. Como os logarítmos de P guardam uma relação direta com P, quando logP fôr máximo, sê-lo-á P. Teremos:

$$(7) \quad \log_e P = -\frac{1}{2}\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n_i}\left[\frac{x_{ij} - m_i}{\sigma_i}\right]^2 - \frac{n}{2}\log_e 2\pi - \left[\sum_i (n_i \log_e \sigma_i)\right]$$

* Vamos designar a (5) e a (6) por P e P'.

$$(8)\quad \log_e P' = -\frac{1}{2}\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n_i}\left[\frac{x_{ij}-m_i}{\sigma}\right]^2 - \frac{n}{2}\log_e 2\pi - n\log_e \sigma$$

Derivando em relação aos parâmetros desconhecidos m_i e σ_i em (7) e m_i e σ em (8):

$$(9)\quad \frac{d\log_e P}{dm_i} = \frac{1}{\sigma_i^2}\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-m_i)$$

$$(10)\quad \frac{d\log_e P}{d\sigma_i} = -\frac{n_i}{\sigma_i} + \frac{1}{\sigma_i^3}\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-m_i)^2$$

$$(11)\quad \frac{d\log_e P'}{dm_i} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-m_i)$$

$$(12)\quad \frac{d\log_e P'}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-m_i)^2$$

Agora, para tornar máxima a razão é preciso tornar máxima a expressão para cada um dos parâmetros em aprêço, e obtemos as estimativas igualando as derivadas parciais a zero.

$$\frac{d\log_e P}{dm_i} = 0\ ;\quad \frac{d\log_e P'}{dm_i} = 0$$

A partir das duas expressões acima obtemos

$$\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-m_i) = 0 \quad \text{então,}\ \hat{m}_i = \bar{x}_i$$

De (10 e 12), ponto $\bar{x}_i$ no lugar de m_i, temos:

$$-\frac{n_i\,\sigma_i^2}{\sigma_i^3} + \frac{1}{\sigma_i^3}\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = \frac{1}{\sigma_i^3}\left[-n_i\,\sigma_i^2 + \sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2\right] = 0$$

$$\text{isto é,}\quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{n_i} = s_i^2$$

$$-\frac{n\sigma^2}{\sigma^3} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = \frac{1}{\sigma^3}\left[-n\,\sigma^2 + \sum_{i}\sum_{j}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2\right] = 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{n} = \frac{\sum_{i}^{k} n_i s_i^2}{n} = \bar{s}^2$$

Substituindo as estimativas em (5) e (6), temos:

$$P_m = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum\sum_{ij}\left[\frac{x_{ij}-\bar{x}_i}{s_i}\right]^2}}{(2\pi)^{n/2}\, s_1^{\,n_1} \ldots\ldots s_k^{\,n_k}} = \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n/2}\, s_1^{\,n_1} \ldots s_k^{\,n_k}}$$

$$P'_m = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum\sum_{ij}\left[\frac{x_{ij}-\bar{x}_i}{\bar{s}}\right]^2}}{(2\pi)^{n/2}\left[\frac{n_1 s_1^2 + \ldots + n_k s_k^2}{n}\right]^{n/2}} = \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n/2}\left[\bar{s}^2\right]^{n/2}}$$

$$\lambda = \frac{P'_m}{P_m} = \frac{s_1^{\,n_1}\; s_2^{\,n_2} \ldots\ldots s_k^{\,n_k}}{\left[\frac{n_1 s_1^2 + \ldots + n_k s_k^2}{n}\right]^{n/2}}$$

Se fôsse fácil de se avaliar a distribuição de λ, seria possível escolhermos uma região de rejeição da hipótese H'_o, a qual é: $P\left[\lambda \leq \lambda_o\right] = 0{,}05$.

Devido à complexidade desta função de distribuição, recorreu-se a uma aproximação conveniente.

Fêz-se $$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\left[\frac{n_1 s_1^2 + \ldots\ldots + n_k s_k^2}{n}\right]^n}{(s_1^2)^{n_1} \ldots\ldots (s_k^2)^{n_k}}$$

A variável $-2\log_e \lambda$ tem uma distribuição aproximada da distribuição de χ^2 com k-1 gráus de liberdade se os valores de n_i são suficientemente grandes. Valores críticos de λ podem ser deduzidos dos valores críticos de χ^2.

Um teste mais rigoroso, particularmente para o caso de n_i serem poucos, é aquêle obtido quando se define uma nova variável μ, pela substituição em λ dos n_i por nf_i (número de gráus de liberdade na amostra), os s_i sendo agora interpretados como estimativas imparciais dos σ_i.

Designando por $\bar{s}^2 = \dfrac{nf_1 s_1^{\ 2} + \ldots + nf_k s_k^{\ 2}}{nf_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + nf_k}$

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{\left[\bar{s}^2\right]^{nf_1 + \ldots + nf_k}}{(s_1^{\ 2})^{nf_1} \ldots . (s_k^{\ 2})^{nf_k}}$$

A variável d/C onde $d = -2\log_e \mu$ sendo

$$d = \sum_1 nf_i \log_e \bar{s}^2 - \sum_1 \left[nf_i \log_e s_i^{\ 2}\right] \text{ e}$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_1 \frac{1}{nf_i} - \frac{1}{\sum_1 nf_i}\right] ,$$

distribui-se aproximadamente de acôrdo com χ^2, com $k-1_2$ gráus de liberdade. A prova de que $\sigma_1^{\ 2} = \sigma_2^{\ 2} = \ldots = \sigma_k^{\ 2} = \sigma^2$ é dada por Bartlett (3). Se, como resultado de um experimento visando comprovar uma hipótese antes formulada, os dados nos conduzirem a um teste de Bartlett, cujo valor de χ^2 não é significativo, a hipótese em aprêço não será rejeitada. Depois de provada a homocedasticidade, seguir-se-iam os processos normais de análise da variância, e a hipótese de nulidade H_o : $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = m$ seria posta em prova.

Aplicação

Os planos experimentais usualmente empregados (blocos ao acaso, quadrado latino, etc.), nos conduzem a situações semelhantes às consideradas e, então, antes de pôr em prova a hipótese de igualdade das médias das populações,

$$H_o : m_1 = m_2 = \ldots . m_k = m ,$$

temos normalmente que pôr em prova a hipótese H'_o.

Para termos uma boa noção da importância do teste de Bartlett e da sua eficiência na seleção de um êrro válido, vamos analisar o Ensaio de Sistema de Plantio de Batata Doce, instalado em 1940, pela Secção de Raízes e Tubérculos da Divisão de Experimentação e Pesquisas (4).

Poderemos utilizar no caso presente, uma fórmula um pouco simplificada, pois no caso em aprêço, tendo tôdas as amostras o mesmo número de variáveis,

$$nf_1 = nf_2 = nf_3 = \ldots = nf_k = nf$$

Nestas condições:

$$\bar{s}^2 = \frac{\cancel{nf}\left[s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_k^2\right]}{k.\cancel{nf}} = \frac{s_1^2 + \ldots + s_k^2}{k}$$

$$d = nf.k(\log_e \bar{s}^2) - \sum_i^k \left[nf.\log_e s_i^2\right]$$

$$d = nf \left[(k \log_e \bar{s}^2) - \sum_i^k \log_e s_i^2\right]$$

Utilizando logarítmos decimais calculamos:

$$d' = nf \left[(k \log_{10} \bar{s}^2) - \sum_i^k \log_{10} s_i^2\right] \quad e$$

$$d = \log_e 10 \; . \; d'$$

O ensaio é do tipo blocos ao acaso com 4 repetições, os seis tratamentos comparados, os seguintes:

1 - Raízes pequenas	Raízes	
2 - Raízes grandes		
3 - Ponteiro distendido	Ramas	
4 - Ponteiro em laço		
5 - Parte média da rama distendida		
6 - Parte média em laço		

Os dados obtidos vão apresentados abaixo:

	1	2	3	4	5	6	Total
I	4,2	2,0	28,2	38,4	26,0	32,6	131,4
II	2,2	5,0	42,2	24,4	32,7	23,2	129,7
III	1,8	4,5	31,2	34,2	26,5	26,0	124,0
IV	2,8	1,5	22,9	35,4	26,2	29,7	118,5
	11,0	12,8	124,5	132,4	111,4	111,5	503,6

A análise da Variância conjunta seria a seguinte:

	SS	GL	MS	F
Total	4.375,81	23	190,25	
Sist.Plantios	3.972,06	5	794,41	30,83**
Blocos	17,17	3	5,72	0,22
Êrro experim.	386,58	15	25,77	

Para maior facilidade na aplicação do teste de Bartlett dispomos os dados da seguinte forma:

AMOSTRAS	Σx^2	C	SS
Amostra 1	33,56	30,25	3,31
Amostra 2	49,74	40,96	8,78
Amostra 3	4.073,93	3.875,06	198,87
Amostra 4	4.492,72	4.382,44	110,28
Amostra 5	3.133,98	3.102,50	31,48
Amostra 6	3.159,09	3.108,06	51,03

Organizamos, a seguir, uma tabela que facilita a maneira de proceder-se às operações que nos conduzem ao cálculo do valor de χ^2.

Amostras	SS	nf	Variância	$\log_{10}$ Variância
1	3,31	3	1,10	0,04139
2	8,78	3	2,93	0,46687
3	198,87	3	66,29	1,82145
4	110,28	3	36,76	1,56538
5	31,48	3	10,49	1,02078
6	51,03	3	17,01	1,23070
		18	134,58	6,14657

$$\bar{s}^2 = \frac{134,58}{6} = 22,43$$

Neste caso, k = 6, nf = 3

$$\log_{10} \bar{s}^2 = 1,35083$$

$$d' = 3 \left[(6 \times 1,35083) - 6,14657 \right]$$

$$d' = 3 \left[8,10498 - 6,14657 \right] = 5,87528$$

então, $d = \log_e 10 \cdot d' = (2{,}3026)\ (5{,}87528) = 13{,}528$

Vimos que $\chi^2 = d/C$

onde $C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_1 \frac{1}{nf_i} - \frac{1}{N} \right]$

No caso, $nf_1 = nf_2 = \ldots\ldots = nf_k = nf$

$$N = k.nf$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\frac{k}{nf} - \frac{1}{k.nf} \right] = 1 + \frac{1}{3.nf} \left[\frac{k+1}{k} \right]$$

$$C = 1 + \frac{1+6}{3(3)(6)} = 1{,}12963$$

$$\chi^2 = d/C = \frac{13{,}528}{1{,}12963} = 11{,}976$$

Para $nf = 5$, o valor de χ^2 tem uma probabilidade um pou co menor que 5%. Um novo teste de Bartlett pode ser efetuado a fim de se verificar se temos grupos de variâncias homogêneas (5).

No caso em aprêço, um agrupamento do tipo 1-2 e 3-4-5-6 foi efetuado e aplicado o teste de Bartlett; os dois novos grupos foram homogêneos quanto às variâncias. Obtivemos, assim, duas variâncias apropriadas para analisar os tratamentos 1 e 2, e 3,4,5 e 6, respectivamente.

Os erros experimentais apropriados valeram 2,02 e 32,64 em vêz do êrro experimental obtido inicialmente pela análise da variância e que era 25,77 (6).

O valor 25,77 era demasiadamente grande para ser utilizado no julgamento das diferenças entre as médias do primeiro grupo e pequeno para ser utilizado na comparação dos tratamentos do segundo grupo.

-o-

C O N C L U S Ã O

Baseado nas condições necessárias e suficientes para a validez da análise da variância enumeradas por Eisenhart, o autor chama a atenção para o fato de que o item (c) dos problemas da Classe I, que são os encontrados comumente em experimentação de campo, pode ser assegurado através de um teste estatístico. Mostra um exemplo em que a não observância dêsse teste pode conduzir a uma análise da variância não válida, achando, porisso, recomendável o uso preliminar do teste de Bartlett em todos os casos em que a análise da Variância fôr aplicada como um processo de interpretação dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

1. Eisenhart, Churchill - Biometrics. Vol.3, Nº 1,pgs 1-21, 1947.

2. Hoel, P.G. Introduction to Mathematical Statistics. 1ª edição, pgs. 201-214 - John Wiley I Sons, Inc. New York, 1947.

3. Bartlett, M.S. Properties of Sufficiency and Statistical Tests, Proc. of Royal Soc., séries A, Vol. 160, pgs. 268-282, 1937.

4. Pais de Camargo, A. Relatório da Secção de Raízes e Tubérculos. pgs. 168-171, 1941. Não publicado.

5. Snedecor, G.W. Statistical Methods. 4ª edição. pgs. 250-252. The Iowa State College Press, Ames, Iowa, 1946.

6. Experiência analisada em 1945 pela Secção de Técnica Experimental e Cálculo.

AGRADECIMENTOS

Queremos deixar aqui consignados os nossos sinceros agradecimentos ao Dr. Constantino G. Fraga Jr., pela revisão feita e por sugestões apresentadas durante a elaboração desta tese.

O MÉTODO DOS PROBITOS*

A.A. Bitancourt

A distribuição normal

O método dos probitos é, essencialmente, um método de análise da distribuição normal. Esta distribuição apresenta-se em numerosos casos em que se registra a frequência de indivíduos de uma população homogênea, em cada uma das classes naturais ou convencionais em que podem ser repartidos tais indivíduos com respeito a determinado caráter. Um dos casos mais conhecidos e um dos primeiros a que foi aplicada a distribuição normal é o da distribuição de indivíduos, de conscritos, por exemplo, de acôrdo com sua altura. Uma aplicação mais recente foi feita aos ensaios biológicos e mais especialmente aos ensaios toxicológicos. Os indivíduos serão, por exemplo, insetos, e o caráter estudado a resistência dêsses organismos a determinado tóxico. Em ambos os casos, os métodos de análise são essencialmente os mesmos.

Anualmente, nos paises onde o serviço militar é obrigatório, todos os cidadãos de determinada idade são chamados às armas. Devido a serem todos da mesma idade e da mesma nacionalidade, tais conscritos constituem uma população relativamente homogênea. Êles são submetidos a diversas mensurações, e, para a altura, por exemplo, temse para um grupo limitado, ou amostra, dêsses indivíduos, a frequência dos que medem, digamos, entre 1m65 e 1m67, 1m67 e 1m69, etc., e, em geral, a frequência para cada uma das classes em que se convenciona dividir a faixa entre as alturas extremas dos indivíduos da amostra. O intervalo das classes é escolhido arbitràriamente. No exemplo citado, o intervalo é de 2 cm e o valor médio, para cada uma das classes citadas, é de 1m66, 1m68, etc.

Admite-se que todos os indivíduos dentro de cada classe têm por altura o valor médio da classe, o que representa uma aproximação tanto mais grosseira quanto é grande o intervalo e exige uma correção em alguns dos cálculos a se efetuarem com os dados da distribuição. Bem entendido, se, em vez de estudar a altura de conscritos, se estudar, por exemplo, o número de pétalas de flores de uma

* O presente artigo visa apresentar o princípio do método dos probitos. O leitor interessado na aplicação do método deverá consultar a bibliografia mencionada no fim do artigo.

espécie vegetal, as classes não são convencionais e sim naturais: 3, 4, 5, 6 pétalas e a correção não se torna necessária.

Um dos processos usuais de representação gráfica de distribuições como esta da altura de conscritos consiste num "histograma", no qual, traçando-se em abcissas as alturas e em ordenadas as frequências, cada classe é representada por um retângulo que tem por base o intervalo escolhido e por altura a frequência observada, conforme se vê na figura 1. Se juntarmos com um traço contínuo o meio do lado horizontal superior de cada retângulo, obtemos uma linha quebrada que, nas populações homogêneas se aproxima da linha contínua representativa da lei normal de frequência, cuja equação é

$$z = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Esta equação tem três parâmetros: N, o número total de indivíduos da amostra, $\bar{x}$ e σ, duas constantes representativas da população e cujo valor pode ser estimado a partir dos dados obtidos da amostra. O melhor estimado de $\bar{x}$ é a média aritmética de tais dados, e o de σ é a raiz quadrada do desvio quadrado médio, ou "desvio padrão".

A comparação de distribuições, como a que tomamos por exemplo, entre si, e, principalmente com a distribuição teórica, ou distribuição normal, pode ser feita pela eliminação dos parâmetros. Para eliminar N basta substituir a frequência dos indivíduos de cada classe pela porcentagem, ou pela fração correspondentes. Por exemplo, se numa amostra de 80 indivíduos há 20 numa das classes, a porcentagem correspondente será 25% e a fração 0,25. No primeiro caso N torna-se igual a 100 e no segundo igual a 1.

O parâmetro $\bar{x}$ pode ser eliminado, transportando-se a origem das abcissas para êsse valor, isto é, substituindo as classes por outras que são desvios da média. Assim, se a média da amostra é 1m65, as classes de valor médio 1m62, 1m64, 1m66, 1m68, etc., serão substituídas pelas de valor médio -2, -1, +1, +2, etc.

Finalmente, σ desaparece igualmente se o fizermos igual a 1. Isto é, toma-se σ como unidade para estabelecer o valor das classes, expressas em desvios da média. Assim, no exemplo que acaba de ser citado, se σ fôr igual a 2 cm, as novas classes serão -1, -0,5, +0,5, +1, etc. Os novos desvios, em função do desvio padrão, são chamados "desvios normais".

Feitas estas transformações, a equação da lei normal, quando as frequências são expressas em frações, reduz-se a

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Para cada valor de x, podemos, pois, calcular um valor de z, que é independente dos parâmetros, e que consta de tabelas publicadas em diversos trabalhos de estatística.

Voltando, agora, ao histograma representativo da distribuição da altura de conscritos, vemos que cada retângulo tem uma área proporcional à frequência dos indivíduos da classe correspondente. A soma total das áreas dos retângulos do histograma será proporcional ao total dos indivíduos medidos e, no caso da distribuição expressa em porcentagens ou em frações, igual a 100 ou a 1, respectivamente.

A área do histograma, corresponde, para a curva representativa da lei normal, à área total compreendida entre esta curva e o eixo das abcissas. Da mesma forma que a área do histograma é a soma da área de seus retângulos, a área da curva normal é a soma de retângulos elementares de altura igual a z e de base infinitamente pequena dx. Uma tal soma, é uma integral e tem por expressão:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

A expressão matemática desta integral não pode ser calculada pelos métodos conhecidos de integração, mas o cálculo de I, para qualquer valor de x, pode ser feito pelos usuais métodos empíricos. Êste cálculo foi feito e consignado em tabelas para diversos intervalos da variável x, intervalos êstes tomados de acôrdo com o fim a que se destina a tabela. Assim, Fisher e Yates (1943), numa tabela destinada principalmente a testes de significância, designam por P a soma dos valores de I, correspondentes aos intervalos $-\infty$ e $-x$

O método dos probitos

O estudo da distribuição de um caráter, como seja a altura de um grupo de indivíduos, conduz, pois, ao cálculo de dois parâmetros, a média e o desvio padrão, que permitem a comparação dessa distribuição com a distribuição normal. O interêsse desta comparação reside na presunção de que a distribuição normal representa melhor a população, de que o grupo de indivíduos constituem uma amostra, do que a própria distribuição dêste grupo, sujeita, dentro de cada classe, a variações ao acaso.

O método dos probitos é um meio racional e simples de análise, que fornece a distribuição normal correspondente a uma série de dados experimentais. O método consiste essencialmente numa transformação adequada das ordenadas do gráfico da figura 3, de forma a substituir a curva sigmóide por uma linha reta.

Para cada valor da variável x corresponde, de acôrdo com a equação integral da curva normal, um valor I desta equação. Para uma série de valores de I, podemos, inversamente, encontrar nas tabelas os valores correspondentes de x. Podemos, então, estabelecer um gráfico em que os valores de I serão substituídos pelos valores de x. O nosso gráfico terá, portanto, em abcissas, os valores de x observados, e em ordenadas, os valores de x calculados a partir de I. É evidente que se o valor de I obtido experimentalmente fôr exatamente o que a distribuição normal exige, o valor de x calculado corresponderá exatamente ao valor observado. Se assim fôr, para todos os pontos do gráfico, êstes se distribuirão ao longo de uma linha reta. Na prática, isto nunca acontece. Os pontos, entretanto, poderão, estar distribuídos de um modo mais ou menos regular, de forma que, a ôlho, seja possível traçar uma linha reta em tôrno da qual os pontos serão mais ou menos uniformemente distribuídos.

Quando os pontos não se distribuem aproximadamente segundo uma linha reta, conclui-se que a distribuição dos indivíduos em relação ao caráter estudado não é normal.

No gráfico da figura 4, o eixo das ordenadas têm por escala os valores calculados (ou teóricos) da variável x, os quais podem ser expressos em desvios normais, ou, conforme foi feito à margem, nas próprias porcentagens com as quais foram calculados os desvios. Para facilitar os cálculos, por eliminação dos valores negativos, Bliss pro pôs uma nova unidade, que êle chamou de "probito", e que é simplesmente o desvio normal acrescido de 5. Aos desvios -1 e +1, correspondem, pois, os probitos 4 e 6, e como se trata de desvios normais, um probito corresponde a um desvio padrão, pois êste é a unidade dos desvios normais. Assim, o intervalo, digamos, entre os probitos 5,5 e 6,5, ou seja, o intervalo de um probito, corresponde exatamente a um desvio padrão. Na figura 4 estão representadas as 3 escalas no eixo das ordenadas.

No eixo das abcissas, a escala é a dos valores observados da variável x. Êstes podem ser expressos em desvios normais, mas é, em geral, preferível exprimí-los diretamente nas unidades adotadas para a medição do caráter em estudo. No caso dos conscritos teremos, pois, a escala de centímetros. Nota-se, imediatamente, que isto dispensa o cálculo da média, dos desvios das classes a partir da média, e, finalmente, dos desvios normais, em função do desvio padrão, adrede calculado.

Em muitos estudos verifica-se que para a escala das abcissas que consiste nos próprios dados experimentais, os pontos do gráfico não caem aproximadamente sôbre uma reta e sim, sôbre uma linha curva, de convexidade virada para cima. É frequente nesses casos, que se consiga uma linha reta, empregando-se, como escala das abcissas, não os próprios dados experimentais e sim, os logarítmos dêstes últimos. É êste, em regra, o caso das experiências de toxicologia, para as quais o método dos probitos foi inicialmente desenvolvido.

Colocados os pontos obtidos experimentalmente no gráfico, pode-se traçar a ôlho a linha reta que melhor se ajusta à distribuição dêsses pontos. Quando os pontos não se afastam sensìvelmente da linha reta, não há necessidade de se prosseguir na análise. A reta permite avaliar gràficamente a média que corresponde ao probito 5 (ou seja, à porcentagem 50%). O desvio padrão corresponde, como dissemos, a um probito. Basta, pois, fazer a leitura, no eixo das abcissas, dos valores de x correspondentes a, digamos, os probitos 4 e 5. O desvio padrão será a diferença entre êsses dois valores. A média e o desvio padrão obtidos pelo processo gráfico serão, em regra, ligeiramente diferentes dos que se obtêm pelo cálculo direto a partir dos valores experimentais.

Em geral, os pontos experimentais se afastam, de um modo mais ou menos pronunciado da linha reta traçada a ôlho, o que torna difícil a escolha da melhor posição e da melhor inclinação da reta. Se os valores dos probitos são completamente independentes entre si, pode-se então calcular uma linha mais correta pelo método dos mínimos quadrados. No caso da distribuição da altura dos conscritos, êste método não pode ser aplicado, pois os mesmos indivíduos são computados na classe a que pertencem e mais em tôdas as classes superiores, uma vez que as frequências são cumuladas. Existe, então, uma correlação entre as frequências observadas, e, por conseguinte, entre os probitos correspondentes. Em alguns problemas de toxicologia, é êste também o caso. Por exemplo, quando um número N de insetos é submetido em conjunto à ação de um tóxico, pode-se avaliar a potência dêste último pelo tempo que cada inseto leva a manifestar o efeito do tóxico. A variável x será, então, por exemplo, o número de segundos dêsse tempo. E, para cada um de seus valores, 10, 20, 30 segundos, por exemplo, serão contados todos os insetos que morreram entre o tempo zero e êstes valores da variável. Obtém-se, assim, uma distribuição com frequências cumuladas correlacionadas entre si e o método dos mínimos quadrados para o cálculo da reta representativa da distribuição não pode ser aplicado.

Na maioria dos casos em toxicologia, entretanto, em vêz de se observar o tempo do efeito do tóxico, observa-se, por exemplo, a porcentagem de insetos afetados para cada uma de uma série de concentrações do tóxico. Empregam-se grupos de insetos diferentes para cada concentração e não há correlação entre as porcentagens observadas, por se tratar de insetos diferentes em cada caso. Nestas condições, é possível empregar o método dos mínimos quadrados para calcular a reta que melhor representa as observações.

Para maior precisão dos cálculos, são usados os seguintes refinamentos:

1º - A variância de um probito é proporcional à expressão

$$\frac{PQ}{nZ^2}$$

onde P é a probabilidade de morte, Q a de sobrevivência, n o número dos insetos que entram na experiência e Z a ordenada da curva normal correspondente ao probito. O pro bito usado para obter êstes valores não é o probito empírico, proveniente das porcentagens observadas. É o "probito estimado", calculado a partir da equação da linha reta traçada a ôlho, equação esta fàcilmente obtida pela leitura no gráfico das coordenadas de dois pontos quaisquer da linha reta. É evidente que quanto maior a variância de um probito, menor a precisão com que êle intervém nos cálculos. É, pois, conveniente afetar cada probito de um "peso" inversamente proporcional à sua variância, ou seja, multiplicá-lo pelo inverso da expressão acima. A expressão Z^2/PQ, ou "coeficiente de pêso" foi calculada para diversos valores dos probitos e consignada em tabelas. Multiplicando o coeficiente pelo número de insetos n que foi utilizado na experiência, obtém-se o pêso que deve afetar cada um dos pares de dados que intervêm no cálculo da reta pelo método dos mínimos quadrados.

2º - Quando o número de insetos utilizados em cada encio é pequeno, o número de insetos que sobrevivem em cada concentração não se distribui normalmente. O probito empírico não é, então, a melhor quantidade a ser utilizada no método dos mínimos quadrados. Substitui-se, pois, a êle o "probito corrigido", que constitui um melhor estimado do probito que teria um ensaio com um número infinito de insetos. Pelo método da máxima verossimilhança, chega-se à seguinte expressão para o probito corrigido.

$$Y + \frac{Q}{Z} - \frac{q}{Z}$$

onde Y é o probito estimado, Q e Z têm o mesmo significado que no coeficiente de pêso e q é a proporção de insetos que efetivamente sobreviveram no ensaio considerado. Quando o número de insetos usados em cada concentração é grande, pode-se aplicar o método dos mínimos quadrados diretamente aos probitos empíricos multiplicados pelo pêso.

Na prática, obtêm-se os probitos corrigidos por meio de tabelas em que os cálculos que conduzem a tais probitos foram parcialmente efetuados para diversos valores dos probitos estimados.

A série de operações a efetuar com os dados experimentais de um ensaio toxicológico com insetos, para transformá-los nos dados efetivamente empregados nas fórmulas do cálculo de regressão pelo método dos mínimos quadrados, será, portanto, a seguinte:

a) a porcentagem de insetos mortos em cada ensaio de concentração, ou de logarítmo da concentração, x, é trans formado em probito y, usando-se para êste fim a tabela correspondente.

b) estabelece-se um gráfico em que os probitos estão em ordenadas e os valores de x em abcissas. Para cada concentração figura-se um ponto de probito y e de concentração (ou seu logarítmo) x.

c) traça-se a ôlho a linha reta que melhor se ajuste à série de pontos obtidos.

d) lendo no gráfico as coordenadas de dois pontos quaisquer da linha reta, estabelece-se a equação desta linha e com ela se calcula, para cada um dos valores de x, o probito estimado correspondente.

e) calcula-se o probito corrigido correspondente a cada um dos probitos estimados, usando-se para êste fim a tabela própria.

f) tira-se da tabela de coeficientes de pêso, êstes coeficientes correspondentes a cada um dos probitos estimados, multiplicando-os por n, o número de insetos empregados em cada concentração. Obtêm-se, assim, os pesos.

g) o método dos mínimos quadrados é, então, aplicado a cada par de dados constituídos pelo probito corrigido e a concentração (ou logarítmo) correspondente, devidamente multiplicado pelo pêso. A presença dêsses pesos exige pequenas modificações nas fórmulas usuais do método dos mínimos quadrados aplicado a uma linha reta.

O resultado dos cálculos efetuados é uma equação do primeiro gráu representativa da linha reta e que tem por expressão

$$y = \bar{y} + b\,(x - \bar{x})$$

onde $\bar{y}$ e $\bar{x}$ são as médias de y e x, e b é o coeficiente de regressão da linha reta.

Quando a nova equação é muito diferente da equação da linha reta provisória traçada a ôlho, tanto os probitos corrigidos como os pesos empregados no cálculo têm valores pouco exatos. Deve-se, então, empregar a nova equação para conseguir novos probitos estimados e com êles realizar novamente tôdas as operações que conduzirão, então, a nova equação, que será mais satisfatória do que a primeira. Os casos em que uma terceira série de cálculos se torna necessária são extremamente raros e não de-em se apresentar se se observou algum cuidado ao traçar a ôlho a linha provisória.

Para se saber se a equação finalmente obtida é realmente representativa dos dados experimentais, e, por consequência, para se saber se os indivíduos se distribuem efetivamente de acôrdo com a lei normal, para o caráter considerado, é necessário fazer-se um teste de que, no caso afirmativo, não deve ter valor estatìsticamente significante.

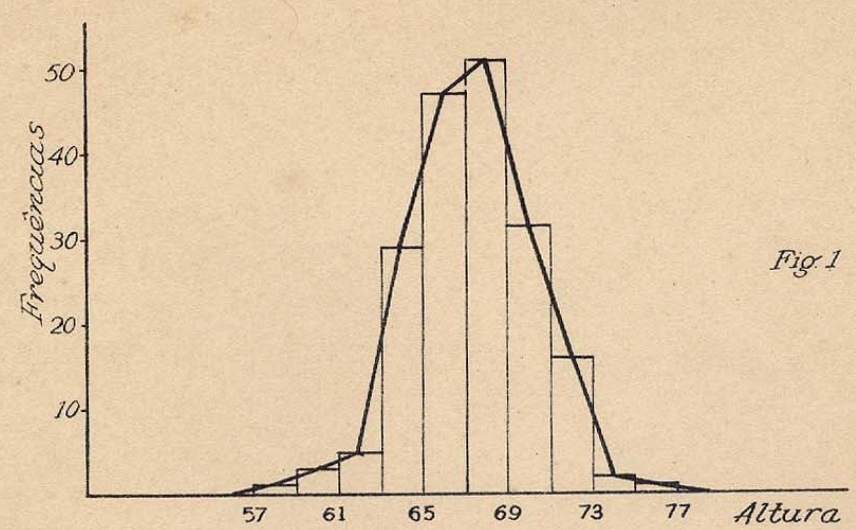
Uma melhor compreensão da significação das constantes $\bar{y}$ e b é dada pela consideração da figura 5, em que estão representadas duas linhas retas características de dois inseticidas I e II, tendo o primeiro o valor de $\bar{y}$ menor e um valor de b maior do que o de II. Vemos que para as concentrações baixas o inseticida I é mais tóxico que o inseticida II. Na escala convencional das concentrações, 50% dos insetos serão mortos por I na concentração 3 e por II na concentração 5. Entretanto, na concentração 7, II mata 95% dos insetos, o que somente se consegue com I na concentração 8. Isto se deve principalmente ao coeficiente b de II, que, sendo mais elevado, corresponde a uma inclinação maior da reta de II e, por consequência, a um aumento de mortalidade muito maior para o mesmo aumento da concentração do que no caso do inseticida I.

Uma linha reta é completamente determinada por dois de seus pontos, ou ainda por um ponto e a inclinação da reta. Esta última é dada pelo coeficiente de regressão b. É fácil ver que êste último nada mais é que o inverso do desvio padrão. De fato, a inclinação da reta pode ser definida como a relação do aumento das ordenadas para o aumento correspondente das abcissas e por conseguinte, a relação do aumento dos probitos para o aumento correspondente das concentrações. Ora, inversamente o desvio padrão nada mais é que a relação do aumento das concentrações para o aumento correspondente dos probitos. Pode-se definir a linha reta por dois pontos como, por exemplo, o que corresponde à mortalidade de 50%, chamada dose-letal 50% e abreviativamente D.L.50, e o que corresponde à dose letal 95%, ou D.L.95. Conforme vimos acima, um inseticida como o inseticida I pode ter uma DL 50 maior e uma DL 95 menor que outro, como o inseticida II. A DL 95 tem, pois, maior valor prático que a DL 50, mas basta considerar o valor do "pêso" dos probitos correspondentes para verificar que se conhece a DL 50 com maior precisão que a DL 95.

Para terminar a análise estatística de inseticidas pelo método dos probitos e tornar possível a comparação entre diversos inseticidas, é preciso calcular o êrro que afeta os coeficientes b e $\bar{y}$ ou as doses letais DL 50 e DL 95, o que se consegue por meio de fórmulas adequadas. É evidente que, se no exemplo acima, o coeficiente b do inseticida I, embora menor que o do inseticida II, não difere significantemente dêste último, não se tem direito de afirmar que êle seja melhor.

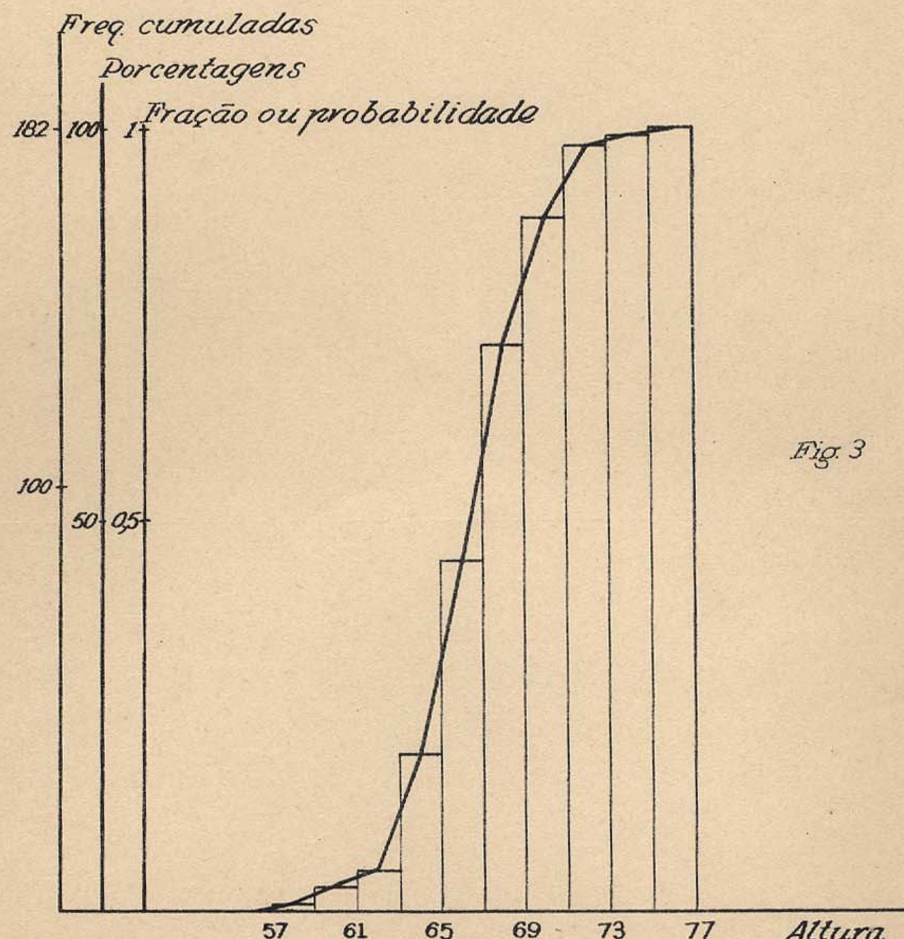
BIBLIOGRAFIA

1. Bliss, C.I. The calculation of the dosage-mortality curve. Ann. Appl. Biol. 22:134-167. 1935.
2. Bliss, C.I. The calculation of the time-mortality curve. Ann. Appl. Biol. 24:815-852. 1937.
3. Bliss, C.I. The determination of the dosage-mortality curve from small numbers. Quarterly Jour. Pharmacy and Pharmacology 11: 192-316 1938.
4. Fisher, R.A. The design of experiments. Oliver & Boyd Edinburgh. 2nd. ed. 1937.
5. Fisher, R.A. & Yates, F. Statistical tables for biological, agricultural and medical research. Oliver & Boyd. Edinburgh. 2nd ed. 1945.



Freqüências
50
40
30
20
10
57
61
65
69
73
77
Altura

Fig. 1



Freq. cumuladas
Porcentagens
Fração ou probabilidade
182
100
1
100
50
0,5
57
61
65
69
73
77
Altura

Fig. 3

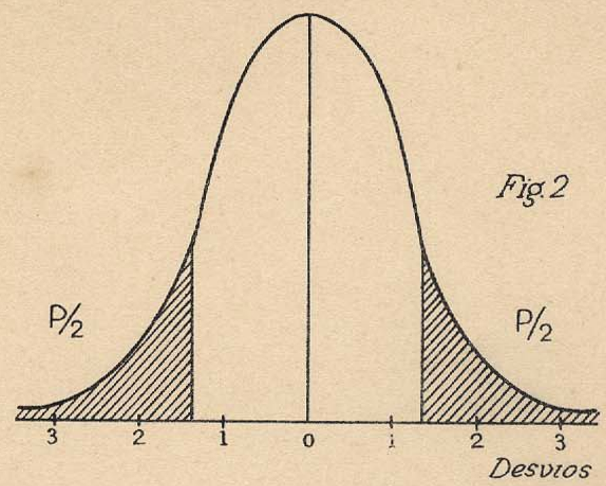


Fig. 2

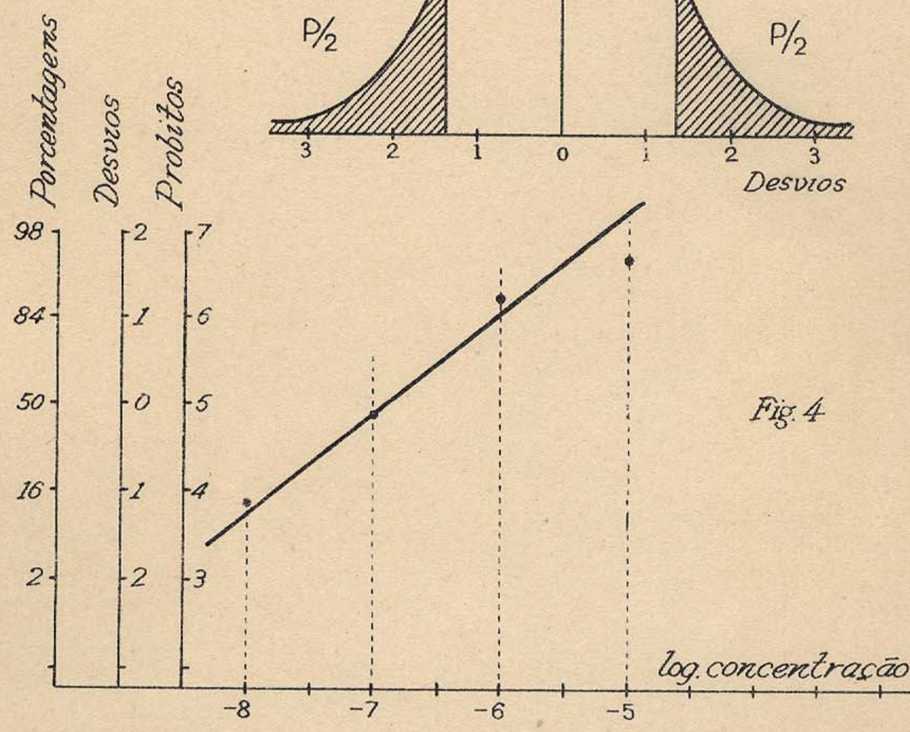


Fig. 4

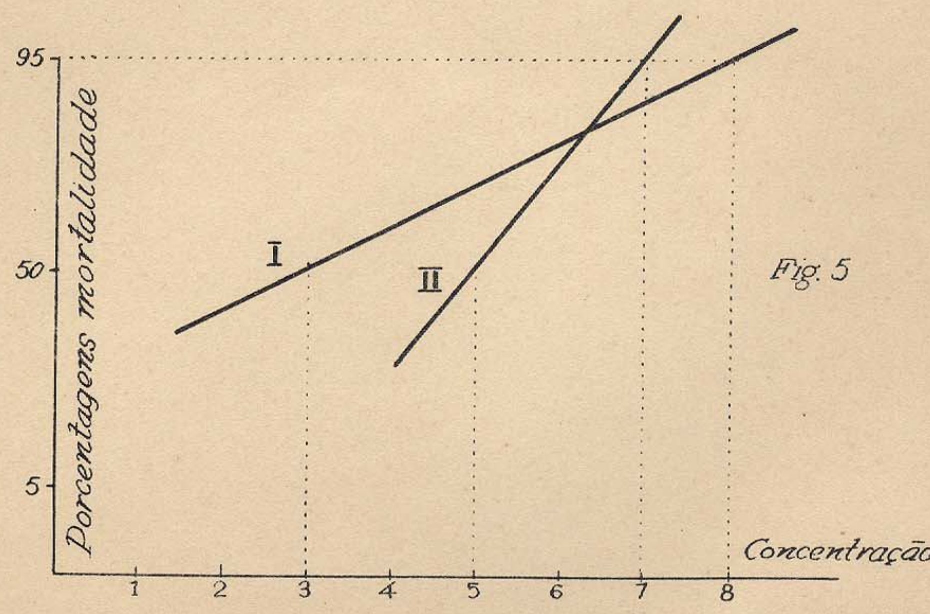


Fig. 5